Correction kholles ECS 2 : 16/11/2021

Kholle A :

1)

1. La restriction de f à $]-\infty,-1[$ et à $]1,+\infty[$ est nulle donc continue. Comme la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$, la restriction de f à $[-1,1]$ est continue.

La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en -1 et 1.

La restriction de f à $]-\infty,-1[$ et à $]1,+\infty[$ est nulle donc positive. La positivité de la valeur absolue assure que f est à valeurs positives sur $[-1,1]$. La fonction f est donc positive sur $\mathbb{R}$.

Comme f est nulle sur $]-\infty,-1[$ et $]1,+\infty[$, les intégrales $\int_{-\infty}^{-1} f(x)dx$ et $\int_{1}^{+\infty} f(x)dx$ convergent et valent 0.

Enfin, on a : $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1}|x|dx = \int_{-1}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{1} x\,dx = \left[\frac{-x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = 1$.

D'après la relation de Chasles, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1.

On en conclut que la fonction f est bien une densité d'une certaine variable aléatoire X.

⇨ *Méthode 14.1*

2. Comme f est nulle sur $]-\infty,-1[$ et $]1,+\infty[$, les intégrales $\int_{-\infty}^{-1} x f(x)dx$ et $\int_{1}^{+\infty} x f(x)dx$ convergent et valent 0.

De plus, on a : $\int_{-1}^{1} x f(x)dx = \int_{-1}^{1} x|x|dx = \int_{-1}^{0} -x^2dx + \int_{0}^{1} x^2dx = \left[\frac{-x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1} = 0$.

Remarque. Pour ce dernier calcul, on pouvait aussi remarquer que $x \mapsto x f(x)$ est impaire et continue sur $[-1, 1]$, ce qui implique que $\int_{-1}^{1} x f(x)dx = 0$.

Pour finir, on conclut que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$ converge et vaut 0. Ainsi, la variable X possède une espérance et $E(X) = 0$.

De même, les intégrales $\int_{-\infty}^{-1} x^2 f(x)dx$ et $\int_{1}^{+\infty} x^2 f(x)dx$ convergent et valent 0.

D'autre part, on a : $\int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2|x|dx = \int_{-1}^{0} -x^3dx + \int_{0}^{1} x^3dx = \left[\frac{-x^4}{4}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{2}$.

Remarque. Pour ce dernier calcul, on pouvait aussi remarquer que $x \mapsto x^2 f(x)$ est paire et continue sur $[-1, 1]$ donc : $\int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx = 2\int_{0}^{1} x^2 f(x)dx = 2\int_{0}^{1} x^3dx = \frac{1}{2}$.

La variable X possède donc un moment d'ordre 2 et $E(X^2) = \frac{1}{2}$.

Ensuite, on a : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{2}$.

⇨ *Méthodes 14.8, 14.9*

3. Notons F la fonction de répartition de X. On a : $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

- si x est strictement inférieur à -1, on a : $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$.
- si x appartient à $[-1,1]$, on a : $F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0dt + \int_{-1}^{x} |t|dt = \int_{-1}^{x} |t|dt$.

  si x appartient à $[-1,0]$, on obtient alors : $F(x) = \int_{-1}^{x} -t\,dt = \left[-\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{x} = \frac{1-x^2}{2}$.

  si x appartient à $[0,1]$, on obtient : $F(x) = \int_{-1}^{0} -t\,dt + \int_{0}^{x} t\,dt = \frac{1+x^2}{2}$.
- si x est strictement supérieur à 1, on a : $F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0dt + \int_{-1}^{0} -t\,dt + \int_{0}^{1} t\,dt + \int_{1}^{x} 0dt = 1$.

⇨ *Méthode 14.4*

2)

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{3^t}$ est continue sur $[2, +\infty[$. De plus, pour tout x supérieur ou égal à 2, on a : $\int_2^x \frac{1}{3^t}dt = \int_2^x e^{-t\ln 3}dt = \left[-\frac{e^{-t\ln 3}}{\ln 3}\right]_2^x = -\frac{e^{-x\ln 3}}{\ln 3} + \frac{e^{-2\ln 3}}{\ln 3}$. Comme $\lim_{x\to+\infty} e^{-x\ln 3} = 0$, on obtient : $\lim_{x\to+\infty} \int_2^x \frac{1}{3^t}dt = \frac{e^{-2\ln 3}}{\ln 3} = \frac{1}{9\ln 3}$. On a donc : $\alpha = \int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t}dt = \frac{1}{9\ln 3}$.

2. • Comme g est nulle sur $]-\infty, 2[$, elle est positive sur cet intervalle. De plus, g est positive sur $[2, +\infty[$ car α est positif. Ainsi, g est positive sur $\mathbb{R}$.

• De même, la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 2.

• La fonction g étant nulle sur $]-\infty, 2[$, l'intégrale $\int_{-\infty}^2 g(t)dt$ converge et vaut 0.

Pour tout réel x supérieur à 2, on a : $\int_2^x 9\ln 3 \frac{1}{3^t}dt = 9\ln 3 \int_2^x \frac{1}{3^t}dt = 9\ln 3\left(-\frac{e^{-x\ln 3}}{\ln 3} + \frac{e^{-2\ln 3}}{\ln 3}\right)$.

Comme $\lim_{x\to+\infty} e^{-x\ln 3} = 0$, on obtient : $\int_2^{+\infty} 9\ln 3 \frac{1}{3^t}dt = 1$. Grâce à la relation de Chasles, $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt$ converge et vaut 1.

En conclusion, g est une densité de probabilité.

⇨ Méthode 14.3

3. Considérons, pour tout x supérieur à 2, l'intégrale $\int_2^x t e^{-t\ln 3}dt$.

On effectue une intégration par parties avec $u(t) = t$, $v'(t) = e^{-t\ln 3}$, $u'(t) = 1$ et $v(t) = -\frac{e^{-t\ln 3}}{\ln 3}$.

Les fonctions u et v étant bien de classe C^1 sur $[2, x]$, on obtient :

$$\int_2^x t e^{-t\ln 3}dt = \left[-\frac{te^{-t\ln 3}}{\ln 3}\right]_2^x + \int_2^x \frac{e^{-t\ln 3}}{\ln 3}dt = -\frac{xe^{-x\ln 3}}{\ln 3} + \frac{2e^{-2\ln 3}}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 3}\int_2^x e^{-t\ln 3}dt.$$

On a donc : $\int_2^x te^{-t\ln 3}dt = -\frac{xe^{-x\ln 3}}{\ln 3} + \frac{2}{9\ln 3} + \frac{1}{\ln 3}\int_2^x e^{-t\ln 3}dt$.

Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{-x\ln 3}}{\ln 3} = 0$ et comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln 3}\int_2^x e^{-t\ln 3}dt = \frac{1}{9(\ln 3)^2}$, l'intégrale $\int_2^{+\infty} te^{-t\ln 3}dt$ est convergente. La variable aléatoire Y a donc une espérance et on a :

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\,g(t)dt = \int_2^{+\infty} 9\ln 3\, t e^{-t\ln 3}dt = 9\ln 3 \int_2^{+\infty} te^{-t\ln 3}dt = 9\ln 3\left(\frac{2}{9\ln 3} + \frac{1}{9(\ln 3)^2}\right) = 2 + \frac{1}{\ln 3}.$$

⇨ Méthode 14.8

4. Z prend ses valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, et pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a :

$$P(Z = k) = P(k \le Y < k+1) = \int_k^{k+1} g(t)dt = 9\ln 3 \int_k^{k+1} e^{-t\ln 3}dt = 9\ln 3\left[-\frac{e^{-t\ln 3}}{\ln 3}\right]_k^{k+1}$$

$$P(Z = k) = 9[-e^{-(k+1)\ln 3} + e^{-k\ln 3}] = 9[e^{-k\ln 3}(1 - e^{-\ln 3})] = 9\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 6\left(\frac{1}{3}\right)^k.$$

⇨ Méthode 14.7

3)

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n}\left(\cot\tan\left(\frac{1}{2^n}\times\frac{\pi}{4}\right) - 2\cot\tan\left(\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n}\cot\tan\left(\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2^{n+1}}\cot\tan\left(\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\xrightarrow[N\to+\infty]{} \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\cot\tan\left(\frac{1}{2^n}\times\frac{\pi}{4}\right)}_{} - \underbrace{2\cot\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0}$$

$$= \frac{4}{\pi} \quad \text{car } \tan x \underset{0}{\sim} x.$$

4)

1. • La restriction de f à $]-\infty, 0[$ est nulle donc positive ou nulle. La restriction de f à $[0, +\infty[$ est positive car x est positif et la fonction exponentielle est positive.
La fonction f est donc positive sur $\mathbb{R}$.

• La restriction de f à $]-\infty, 0[$ est nulle donc continue. La restriction de f à $[0, +\infty[$ est une fonction usuelle, continue sur $[0, +\infty[$.
La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en 0.

• Comme f est nulle sur $]-\infty, 0[$, alors $\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt$ converge et est égale à 0.

Pour tout $x \geq 0$, on a : $\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x te^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^x = -e^{-\frac{x^2}{2}} + 1$.

Comme $\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$, on peut conclure que $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut 1.

Grâce à la relation de Chasles, on a bien : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut 1.

• Conclusion : la fonction f est une densité.

⇨ *Méthode 14*

2. a) On sait : $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

• Si x est strictement négatif, on a : $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$.

• Si x est positif ou nul, on a : $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} te^{-\frac{t^2}{2}}dt = \left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^x = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}$.

⇨ Méthode 14.1

b) Par définition de la fonction de répartition, on a : $P(X \leq \mu) = F(\mu)$.

Comme $F(x) = 0$ pour tout réel x négatif, μ est nécessairement positif.

On cherche donc à résoudre : $1 - e^{-\frac{\mu^2}{2}} = \frac{1}{2}$. $\quad (E)$

On a alors : $(E) \Leftrightarrow e^{-\frac{\mu^2}{2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{\mu^2}{2} = -\ln 2 \Leftrightarrow \mu^2 = 2\ln 2$.

Comme μ est positif, on en conclut que la médiane de X vaut $\sqrt{2\ln 2}$.

3. La fonction f est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et positive sur $\mathbb{R}_+$. Le maximum de f, s'il existe, est donc atteint sur $\mathbb{R}_+$. Etudions alors f sur $\mathbb{R}_+$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout x strictement positif, on a :

$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}(1 - x^2)$.

On en déduit que $f'(x)$ est du signe de $1 - x^2$ sur $\mathbb{R}_+$.

La fonction f est donc croissante sur $[0, 1]$ puis décroissante sur $[1, +\infty[$, elle atteint donc un maximum en 1 (qui vaut $e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$). On en déduit que la variable X n'a qu'un seul mode et que ce mode vaut $M_0 = 1$.

4. a) Notons G la fonction de répartition de la variable Y.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = P(Y \leq x)$. De plus, on a : $(Y \leq x) = (X^2 \leq x)$.

• Si x est strictement négatif, l'événement $(X^2 \leq x)$ est impossible, on a donc : $G(x) = 0$.

• Si x est positif ou nul, on a : $(Y \leq x) = (X^2 \leq x) = (-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x})$.

On en déduit : $G(x) = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x})$ et comme $-\sqrt{x}$ est négatif, on a : $F(-\sqrt{x}) = 0$.

On en déduit : $\forall x \geq 0, G(x) = 1 - e^{-\frac{(\sqrt{x})^2}{2}} = 1 - e^{-\frac{x}{2}}$.

⇨ Méthode

• Montrons maintenant que Y est une variable à densité.

La restriction de G à $]-\infty,0[$ est continue et de classe C^1 en tant que fonction nulle.

La restriction de G à $[0,+\infty[$ est continue et même de classe C^1 (fonction usuelle).

De plus, on a : $\lim\limits_{x\to 0^+} G(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} G(x) = 0 = G(0)$.

La fonction G est donc continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

La variable aléatoire Y est une variable aléatoire à densité.

⇨ *Méthode 14.5*

Une densité de Y s'obtient alors en dérivant, sauf en 0, la fonction G et en choisissant une valeur arbitrairement en 0. On obtient ainsi :

• $\forall x<0, G'(x)=0$.

• $\forall x>0, G'(x)=\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$.

On en déduit que la fonction g définie par : $g(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x<0 \\ \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} \text{ si } x\geq 0 \end{cases}$ est une densité de Y (on a posé $g(0)=\frac{1}{2}$).

b) • On cherche μ tel que $P(Y\leq\mu)=\frac{1}{2}$. Pour la même raison qu'à la question **2.b)**, μ est positif.

On a alors : $P(Y\leq\mu)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 1-e^{-\frac{\mu}{2}}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-\frac{\mu}{2}}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \mu=2\ln 2$.

La médiane de la variable Y est donc $2\ln 2$.

• Ensuite on cherche les réels en lesquels g atteint son maximum.

On remarque que, comme pour f, la fonction g atteint son maximum sur $\mathbb{R}_+$.

On remarque que g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc g atteint son maximum une seule fois en 0 (et ce maximum vaut $\frac{1}{2}$). On en conclut que la variable Y n'a qu'un seul mode et qu'il vaut 0.

• Étudions l'espérance, si elle existe, de Y.

La fonction g est nulle $]-\infty,0[$ donc $\int_{-\infty}^{x} t\,g(t)\,dt$ converge et vaut 0.

Pour tout réel x positif, par intégration par parties, on a : $\int_0^x t\,g(t)\,dt=\left[-\frac{t}{4}e^{-\frac{t}{2}}\right]_0^x+\frac{1}{4}\int_0^x e^{-\frac{t}{2}}dt$.

On a posé $\begin{cases} u(t)=t \\ v'(t)=\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}} \end{cases}$, $\begin{cases} u'(t)=1 \\ v(t)=-\frac{1}{4}e^{-\frac{t}{2}} \end{cases}$, et u et v sont bien de classe C^1 sur $[0,x]$.

On obtient finalement : $\int_0^x t\,g(t)\,dt=-\frac{x}{4}e^{-\frac{x}{2}}-\frac{1}{8}\left[e^{-\frac{t}{2}}\right]_0^x=-\frac{x}{4}e^{-\frac{x}{2}}-\frac{1}{8}e^{-\frac{x}{2}}+\frac{1}{8}$.

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{x}{2}}=0$. On en conclut que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t\,g(t)\,dt$ converge et vaut $\frac{1}{8}$. Grâce à la relation de Chasles, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t\,g(t)\,dt$ converge et vaut $\frac{1}{8}$.

Finalement, Y possède une espérance et $E(Y)=\frac{1}{8}$.

Kholle B :

1)2)

$$v_n = \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) ;$$

$\tan(\arctan(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\arctan(\tan(x)) = x \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$.

3) $$\tan(\arctan(n+1) - \arctan(n)) = \frac{\tan(\arctan(n+1)) + \tan(\arctan(n))}{1 - \tan(\arctan(n+1))\tan(-\arctan(n))}$$

$$= \frac{1}{1+(n^2+n)} = \frac{1}{1+n^2+n}$$

Donc $v_n = \arctan\left(\frac{1}{1+n^2+n}\right) = \arctan(\tan(\arctan(n+1) - \arctan(n)))$

$= \arctan(n+1) - \arctan(n)$

Vrai car $\frac{1}{1+n+n^2} \in]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$

car $1+n+n^2 \geq \frac{3}{4}$.

Donc $$\sum_{n=0}^{N} v_n = \arctan(N+1) - \arctan(0) \xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

$$v_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) :$$

$$\ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \ln(n-1) + \ln(n+1) - 2\ln(n)$$

$$\sum_{n=2}^{N} v_n = \sum_{n=2}^{N} \ln(n-1) - \ln(n) + \sum_{n=2}^{N} \ln(n+1) - \ln(n)$$

$$= 0 - \ln(N) + \ln(N+1) - \ln(2) \xrightarrow[N \to +\infty]{} -\ln(2)$$

$$v_n = \frac{1}{2^n} \tan\left(\frac{1}{2^n} \cdot \frac{\pi}{4}\right) :$$

$\tan(x) = \cot\text{an}(x) - 2\cot\text{an}(2x)$ car $\cot\text{an}(2x) = \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}$

donc $$\cot\text{an}(x) - 2\cot\text{an}(2x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{2\cos(2x)}{\sin(2x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{2\cos(2x)}{2\cos(x)\sin(x)}$$

$$= \frac{\cos^2(x) - \cos(2x)}{\sin(x)\cos(x)} = \frac{\sin^2(x)}{\sin(x)\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$$

3)

1. a) Il y a trois cas à envisager :

- Si A n'a aucune valeur propre, elle n'est évidemment pas diagonalisable.
- Si A n'a qu'une valeur propre λ et si A était diagonalisable, alors il existerait une matrice P inversible telle que $A = P\lambda I P^{-1} = \lambda I$. Comme A n'est pas scalaire, ceci est inenvisageable.
- Si A possède 2 valeurs propres, on sait que A est diagonalisable (condition suffisante : 2 valeurs propres distinctes pour une matrice d'ordre 2).

On peut conclure : A est diagonalisable si seulement si A possède 2 valeurs propres distinctes.

b) Les valeurs propres de A sont les réels λ pour lesquels $(A - \lambda I)$ n'est pas inversible.

$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & 4x-\lambda \end{pmatrix}$. Avec l'opération $L_1 \leftrightarrow L_2$, on obtient :

$\begin{pmatrix} 1 & 4x-\lambda \\ -\lambda & -1 \end{pmatrix}$. Maintenant, on effectue l'opération $L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1$:

$\begin{pmatrix} 1 & 4x-\lambda \\ 0 & -\lambda^2+4x\lambda-1 \end{pmatrix}$

La réduite de Gauss ci-dessus étant triangulaire, elle n'est pas inversible si et seulement si : $-\lambda^2+4x\lambda-1=0$, soit $\lambda^2-4x\lambda+1=0$.

Les valeurs propres de A sont les réels λ solutions de $\lambda^2-4x\lambda+1=0$.

c) D'après la question **1.a)**, on en déduit que A est diagonalisable si et seulement si l'équation $\lambda^2-4x\lambda+1=0$ possède 2 solutions distinctes, c'est-à-dire si et seulement si son discriminant $\Delta = 16x^2-4$ est strictement positif.

On en conclut que A est diagonalisable si, seulement si : $x^2 > \frac{1}{4}$.

4)

Pour $i \geq 2$, on introduit l'événement

$$A_i = \text{« La } i\text{-ème boule tirée est identique à la précédente »}$$

Compte tenu de la composition de l'urne, on peut affirmer

$$\mathrm{P}(A_i) = 1/N$$

Compte tenu de l'expérience modélisée (tirage avec remise), les événements A_i sont mutuellement indépendants.

(a) L'événement $(T = k)$ correspond à $A_2 \cap \ldots \cap A_k$ et donc

$$\mathrm{P}(T = k) = \frac{1}{N^{k-1}}$$

L'événement $(T = k+1)$ correspond à $\overline{A_2} \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{k+1}$ et donc

$$\mathrm{P}(T = k+1) = \frac{N-1}{N} \times \frac{1}{N^{k-1}} = \frac{N-1}{N^k}$$

(b) L'événement $(T = n+k)$ correspond à $\overline{(T \leq n)} \cap \overline{A_{n+1}} \cap A_{n+2} \cap \ldots \cap A_{n+k}$ et donc

$$\mathrm{P}(T = n+k) = \mathrm{P}(T > n) \times \frac{N-1}{N^k}$$

(c) Sous réserve de convergence, l'espérance de T peut s'écrire

$$\mathrm{E}(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(T > n)$$

Ici

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(T > n) = \mathrm{P}(T > 0) + \frac{N^k}{N-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(T = n+k)$$

Ce qui assure l'existence de l'espérance. De plus, puisque le processus s'arrête presque sûrement et que la variable$T$ prend ses valeurs dans $\{k, k+1, \ldots\}$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(T = n+k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathrm{P}(T = n) - \mathrm{P}(T = k) = 1 - \frac{1}{N^{k-1}}$$

On en déduit la valeur de l'espérance de T

$$\mathrm{E}(T) = \frac{N^k - 1}{N-1}$$

Notons, même si ce n'est pas l'objet de cet exercice, qu'il est assez facile de justifier que le processus s'arrête presque sûrement. Considérons l'événement

$$B = \text{« le processus ne s'arrête pas »}$$

Pour voir que celui-ci est négligeable, on va l'inclure dans un événement (de probabilité plus immédiatement accessible) en regroupant les tirages k par k :

$$B \subset \bigcap_{j=0}^{+\infty} \{\text{les tirages de rangs } jk+1, jk+2, \ldots, jk+k \text{ ne sont pas tous identiques}\}$$

Par indépendance et continuité décroissante

$$\mathrm{P}(B) \leq \lim_{J \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{N^{k-1}}\right)^J = 0$$

Kholle C :

1)

1. Question de cours.
2. a) Chacune des deux variables aléatoires $N_1^{(n)}$ et $N_2^{(n)}$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/n)$.

   b) Non, puisque par exemple

$$P([N_1^{(n)} = n] \cap [N_1^{(n)} = n]) = 0 \neq P([N_1^{(n)} = n]) \times P([N_1^{(n)} = n]) \ .$$

   c)

```
function [N1,N2]=ggrand(n)
   X=rand(n,1);
   N1=length(find(X>=1-1/n));
   N2=length(find((X>=1-2/n))-N1;
endfunction
```

3.

$$\begin{aligned} P([N_1^{(n)} = k] \cap [N_2^{(n)} = \ell]) &= \binom{n}{k}\binom{n-k}{\ell}(\frac{1}{n})^k(\frac{1}{n})^{n-k}(1-\frac{2}{n})^{n-k-\ell} \\ &= \frac{n!}{k!\,\ell!\,(n-k-\ell)!}\frac{(n-2)^{n-k-\ell}}{n^n} \ . \end{aligned}$$

4. La voie la plus courte pour parvenir au résultat est d'observer que $N_1^{(n)} + N_2^{(n)}$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 2/n)$ et d'utiliser le résultat du cours sur la convergence de lois binomiales vers la loi de Poisson.

   On peut aussi utiliser le résultat de la question précédente, car lorsque n tend vers l'infini
   - $\dfrac{n!}{k!\,\ell!\,(n-k-\ell)!} \sim \dfrac{n^{k+\ell}}{k!\,\ell!}$
   - $(1-\dfrac{2}{n})^{n-k-\ell} \to \mathrm{e}^{-2}$.

   Il en résulte que

$$\lim_{n\to+\infty} P([N_1^{(n)} = k] \cap [N_2^{(n)} = \ell]) = \frac{\mathrm{e}^{-2}}{k!\,\ell!} \tag{1}$$

   Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on déduit du résultat précédent que :

$$\lim_{n\to+\infty} P([N_1^{(n)} + N_2^{(n)} = m]) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\mathrm{e}^{-2}}{k!\,(m-k)!} = \frac{2^m}{m!}\mathrm{e}^{-2} \ .$$

   Ceci confirme que la suite $(N_1^{(n)} + N_2^{(n)})_{n\geq 3}$ converge en loi vers une variable suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(2)$.

5. a) p

$$E(s_1^{N_1^{(n)}} s_2^{N_2^{(n)}}) = \sum_{k\geq 0, \ell\geq 0, k+\ell\leq n} \frac{n!}{k!\,\ell!\,(n-k-\ell)!}(\frac{s_1}{n})^k(\frac{s_2}{n})^\ell\,(1-\frac{2}{n})^{n-k\ell} = (1+\frac{s_1+s_2-2}{n})^n$$

   b)

$$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{s_1+s_2-2}{n})^n = \mathrm{e}^{s_1+s_2-2} \tag{2}$$

2)

3. On a : $R(\Omega) = [0, 1]$ car Y et Z sont positives et $Y \leq Z$.
Notons F_R la fonction de répartition de R.

- Si $x < 0$, on a : $F_R(x) = P(R \leq x) = 0$.
- On a : $\forall x \in [0, 1]$, $P(R \leq x) = P(Y \leq xZ) = P(1 - Z \leq xZ)$ car $Y + Z = 1$.

On en déduit : $\forall x \in [0, 1]$, $P(R \leq x) = P(1 \leq (x+1)Z)$.

Comme $x + 1 > 0$, on obtient : $\forall x \in [0, 1]$, $F_R(x) = 1 - F_Z(\frac{1}{x+1})$. De plus, on a : $\frac{1}{2} \leq x+1 \leq 1$,

on en déduit : $F_R(x) = 1 - (2 \times \frac{1}{x+1} - 1)$, soit : $\forall x \in [0, 1]$, $F_R(x) = \frac{2x}{x+1}$.

- Si $x > 1$, on a : $F_R(x) = P(R \leq x) = 1$.

En dérivant F_R sauf en 0 et en 1, où l'on posera $f_R(0) = 2$ et $f_R(1) = \frac{1}{2}$, on obtient une densité f_R

de R définie par : $f_R(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$ si $x \in [0, 1]$ et $f_R(x) = 0$ sinon.

On obtient : $E(R) = \int_0^1 \frac{2x}{(x+1)^2} dx = \int_0^1 \frac{2x+2-2}{(x+1)^2} dx = \int_0^1 (\frac{2}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}) dx$.

$$= \left[2\ln|x+1| + 2\frac{1}{x+1} \right]_0^1 = 2\ln 2 + 1 - 2 = 2\ln 2 - 1.$$

Bonus :

1. La variable X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ donc sa partie entière, Y, prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.
Pour tout k de $\mathbb{N}$, $(Y = k) = (k \leq X < k+1)$, d'où l'on déduit, en passant aux probabilités :
$P(Y = k) = P(k \leq X < k+1) = F_X(k+1) - F_X(k)$, où F_X désigne la fonction de répartition de X (la dernière égalité est vraie car X est une variable à densité, elle serait fausse dans le cas contraire).
En remplaçant F_X par son expression, on trouve :
$P(Y = k) = \left(1 - e^{-\lambda(k+1)}\right) - \left(1 - e^{-\lambda k}\right) = e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)}$.

En mettant $e^{-\lambda k}$ en facteur (en prévision de la question suivante), on obtient :
$\forall k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k) = e^{-\lambda k}(1 - e^{-\lambda})$.

2. a) On a : $Z(\Omega) = (Y+1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et on a : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(Z = k) = P(Y + 1 = k) = P(Y = k - 1)$.
Compte tenu du résultat de la question précédente, on obtient alors, pour tout k de $\mathbb{N}^*$:
$P(Z = k) = e^{-\lambda(k-1)}(1 - e^{-\lambda}) = (e^{-\lambda})^{k-1}(1 - e^{-\lambda})$.
Comme λ est strictement positif, $e^{-\lambda}$ est plus petit que 1 donc : $1 > 1 - e^{-\lambda} > 0$.
On peut alors affirmer que Z suit la loi géométrique de paramètre $1 - e^{-\lambda}$.

b) D'après le cours, on a : $E(Z) = E(Y+1) = \frac{1}{1-e^{-\lambda}}$ et $V(Z) = V(Y+1) = \frac{e^{-\lambda}}{(1-e^{-\lambda})^2}$.
Comme Z a une espérance, alors Y en a une aussi, et, par propriété de l'espérance, on a :
$E(Y+1) = E(Y) + 1$, d'où l'on déduit : $E(Y) = \frac{1}{1-e^{-\lambda}} - 1 = \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}$.

On peut aussi écrire si l'on veut : $E(Y) = \frac{1}{e^{\lambda} - 1}$.
Comme Z a une variance, alors Y en a une aussi et, par propriété de la variance on a :
$V(Y) = V(Y+1) = \frac{e^{-\lambda}}{(1-e^{-\lambda})^2}$. On peut aussi écrire si l'on veut : $V(Y) = \frac{e^{\lambda}}{(e^{\lambda} - 1)^2}$.