

Kholle A: 2)

- $f(P, Q)$ est réel.
- $f(P, Q) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1) = Q(-1)P(-1) + Q(0)P(0) + Q(1)P(1) = f(Q, P)$.
- $f(\lambda P + R, Q) = (\lambda P + R)(-1)Q(-1) + (\lambda P + R)(0)Q(0) + (\lambda P + R)(1)Q(1) = (\lambda P(-1) + R(-1))Q(-1) + (\lambda P(0) + R(0))Q(0) + (\lambda P(1) + R(1))Q(1)$

On en déduit : $f(\lambda P + R, Q) = \lambda(P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)) + (R(-1)Q(-1) + R(0)Q(0) + R(1)Q(1))$.

Finalement, on a : $f(\lambda P + R, Q) = \lambda f(P, Q) + f(R, Q)$.

- $f(P, P) = (P(-1))^2 + (P(0))^2 + (P(1))^2 \geq 0$ en tant que somme de carrés.
 - Si $f(P, P) = 0$ alors $(P(-1))^2 + (P(0))^2 + (P(1))^2 = 0$. Une somme de réels positifs est nulle si, et seulement si, tous les termes de la somme sont nuls. On obtient : $P(-1) = P(0) = P(1) = 0$. Le polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$, qui possède au moins trois racines distinctes, est donc nécessairement le polynôme nul. Ainsi, on a montré que : $f(P, P) = 0 \Rightarrow P = 0$.
- En conclusion, l'application f définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

2. a) Expliquons, par exemple, le calcul de $a_{1,2} = \langle X, X^2 \rangle$. On pose $P = X$ et $Q = X^2$.

On a : $P(-1) = -1, Q(-1) = 1, P(0) = 0, Q(0) = 0, P(1) = 1, Q(1) = 1$.

Ainsi : $a_{1,2} = \langle X, X^2 \rangle = -1 \times 1 + 0 \times 0 + 1 \times 1 = 0$. En procédant ainsi, on trouve :

$$a_{0,0} = \langle 1, 1 \rangle = 3, \quad a_{1,1} = \langle X, X \rangle = 2, \quad a_{2,2} = \langle X^2, X^2 \rangle = 2.$$

$$a_{0,1} = a_{1,0} = \langle 1, X \rangle = 0, \quad a_{0,2} = a_{2,0} = \langle 1, X^2 \rangle = 2, \quad a_{1,2} = a_{2,1} = \langle X, X^2 \rangle = 0.$$

b) Compte tenu des résultats précédents, on a :

$$\bullet \langle 1, X \rangle = a_{0,1} = 0$$

$$\bullet \langle 1, X^2 - \frac{2}{3} \rangle = \langle 1, X^2 \rangle - \frac{2}{3} \langle 1, 1 \rangle = a_{0,2} - \frac{2}{3} a_{0,0} = 2 - \frac{2}{3} \times 3 = 0.$$

$$\bullet \langle X, X^2 - \frac{2}{3} \rangle = \langle X, X^2 \rangle - \frac{2}{3} \langle X, 1 \rangle = a_{1,2} - \frac{2}{3} a_{1,0} = 0.$$

Ainsi, la famille $\left(1, X, X^2 - \frac{2}{3}\right)$ est orthogonale.

3. Les sous-espaces F et G sont orthogonaux si : $\langle 1 + X, X - X^2 \rangle = 0$ et $\langle 1 - X^2, X - X^2 \rangle = 0$.

$$\bullet \langle 1 + X, X - X^2 \rangle = a_{0,1} - a_{0,2} + a_{1,1} - a_{1,2} = 0 - 2 + 2 - 0 = 0.$$

$$\bullet \langle 1 - X^2, X - X^2 \rangle = a_{0,1} - a_{0,2} - a_{2,1} + a_{2,2} = 0 - 2 - 0 + 2 = 0.$$

Ainsi, les sous-espaces vectoriels F et G sont donc orthogonaux.

Kholle A 4)

1. Le réel λ est valeur propre de A si, et seulement si, $A - \lambda I$ n'est pas inversible.

On a : $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$. Cherchons une réduite de Gauss de $A - \lambda I$.

On échange les lignes 1 et 3 pour obtenir : $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3-\lambda \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 3-\lambda & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Les opérations $L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow 4L_3 - (3-\lambda)L_1$ donnent : $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3-\lambda \\ 0 & -2-2\lambda & 1+\lambda \\ 0 & 2+2\lambda & (1+\lambda)(7-\lambda) \end{pmatrix}$.

Enfin, avec $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, on obtient : $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3-\lambda \\ 0 & -2-2\lambda & 1+\lambda \\ 0 & 0 & (1+\lambda)(8-\lambda) \end{pmatrix}$.

Ainsi, on trouve : $\lambda \in \text{Sp}(A) \Leftrightarrow -2-2\lambda = 0$ ou $(1+\lambda)(8-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$ ou $\lambda = 8$.

On en déduit : $\text{Sp}(A) = \{-1, 8\}$.

Pour la recherche des sous-espaces propres, on note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et on utilise la réduite de Gauss

de A obtenue ci-dessus.

• Pour la valeur propre $\lambda = -1$: $(A + I)X = 0 \Leftrightarrow 4x + 2y + 4z = 0 \Leftrightarrow y = -2x - 2z$.

$$(A + I)X = 0 \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ -2x - 2z \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le sous-espace propre de A associé à la valeur propre -1 est : $E_{-1} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

• Pour la valeur propre $\lambda = 8$: $(A - 8I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y - 5z = 0 \\ -18y + 9z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = 2y \end{cases}$.

Le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 8 est :

$$E_8 = \left\{ \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 2y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right). \text{ On note : } e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminons une famille orthonormale de chaque sous-espace propre.

• Pour E_{-1} , on note $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et on détermine un vecteur $e_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ non nul de E_{-1} tel que :

$$\langle e_2, e_1 \rangle = 0.$$

On a : $\begin{cases} e_2 \in E_{-1} \\ \langle e_2, e_1 \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b + 4c = 0 \\ a - 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -\frac{5}{2}b \\ a = 2b \end{cases}$. Le vecteur $e_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ convient.

La famille (e_1, e_2) ainsi construite est une base orthogonale de E_{-1} . Comme $\|e_1\| = \sqrt{5}$ et $\|e_2\| = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$, la famille $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}e_1, \frac{1}{3\sqrt{5}}e_2\right)$ est une base orthonormale de E_{-1} .

• Pour E_8 , comme $\|e_3\| = 3$, la famille $\left(\frac{1}{3}e_3\right)$ est une base orthonormale de E_8 .

• Ainsi, la famille $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}e_1, \frac{1}{3\sqrt{5}}e_2, \frac{1}{3}e_3\right)$ est une base orthonormale de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, formée de vecteurs propres de A , dont les valeurs propres associées sont respectivement : -1 , -1 et 8 .

Finalement, on obtient
$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 0 & -5/3\sqrt{5} & 2/3 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

La matrice P , ainsi construite, est orthogonale et on a la relation : $A = PD^tP$.

Kholles A 1)

1. Soit $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ et $z = (z_1, z_2, z_3)$ trois vecteurs de \mathbb{R}^3 , et λ un réel.

• On constate d'abord que $f(x, y)$ est réel.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x_1 - 2x_2)(y_1 - 2y_2) + x_2y_2 + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3) \\ &= (y_1 - 2y_2)(x_1 - 2x_2) + y_2x_2 + (y_2 + y_3)(x_2 + x_3) = f(y, x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\lambda x + y, z) &= (\lambda x_1 + y_1 - 2(\lambda x_2 + y_2))(z_1 - 2z_2) + (\lambda x_2 + y_2)z_2 + (\lambda x_2 + y_2 + \lambda x_3 + y_3)(z_2 + z_3) \\ &= \lambda[(x_1 - 2x_2)(z_1 - 2z_2) + x_2z_2 + (x_2 + x_3)(z_2 + z_3)] \\ &\quad + [(y_1 - 2y_2)(z_1 - 2z_2) + y_2z_2 + (y_2 + y_3)(z_2 + z_3)]. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient : $f(\lambda x + y, z) = \lambda f(x, z) + f(y, z)$.

• $f(x, x) = (x_1 - 2x_2)^2 + x_2^2 + (x_2 + x_3)^2 \geq 0$ en tant que somme de carrés.

• Si $f(x, x) = 0$, on obtient : $(x_1 - 2x_2)^2 + x_2^2 + (x_2 + x_3)^2 = 0$. Une somme de réels positifs est nulle si, et seulement si, tous les termes de la somme sont nuls. On en déduit :

$$x_1 - 2x_2 = x_2 = x_2 + x_3 = 0 \text{ soit } x_2 = x_3 = x_1 = 0. \text{ Ainsi, on a montré que : } f(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

En conclusion, l'application f définit ainsi un produit scalaire sur \mathbb{R}^3 .

2. a) On a : $\langle e_1, e_2 \rangle = (1-2)(-3-2(-2)) + 1(-2) + (1+2)(-2+3) = 0$. Ainsi, la famille (e_1, e_2) est orthogonale.

b) Soit $x = (x_1, x_2, x_3)$ un vecteur de \mathbb{R}^3 . On a : $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = (x_1 - 2x_2)^2 + x_2^2 + (x_2 + x_3)^2$.

$$\bullet \|e_1\|^2 = \langle e_1, e_1 \rangle = (1-2)^2 + 1^2 + (1+1)^2 = 6, \text{ donc : } \|e_1\| = \sqrt{6}. \text{ On pose : } u_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}e_1.$$

$$\bullet \|e_2\|^2 = \langle e_2, e_2 \rangle = (-3+4)^2 + (-2)^2 + (-2+3)^2 = 6, \text{ donc : } \|e_2\| = \sqrt{6}. \text{ On pose : } u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}e_2.$$

La famille (u_1, u_2) , ainsi construite, est bien une famille orthonormale de \mathbb{R}^3 .

Première partie.

1. Si f est un endomorphisme orthogonal de E , on sait que, pour tout couple (x, y) de vecteurs de E , on a : $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$. En particulier : $\langle f(x), f(x) \rangle = \langle x, x \rangle$.

Si on considère un vecteur x appartenant à $\text{Ker } f$, on a : $f(x) = 0$. On en déduit : $\langle x, x \rangle = 0$.

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \frac{1}{2} (\|f(x+y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2) \text{ car } f \text{ est linéaire.}$$

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \frac{1}{2} (\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \text{ d'après l'hypothèse.}$$

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle. \text{ Ainsi, l'endomorphisme } f \text{ est orthogonal.}$$

On a montré que l'endomorphisme f est orthogonal si, et seulement si, pour tout vecteur x de E , on a : $\|f(x)\| = \|x\|$.

2. Soit f un endomorphisme orthogonal de E . On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E . On considère la famille $\mathcal{B}' = (f(e_1), \dots, f(e_n))$. Comme f est orthogonal, pour tout couple (x, y) de vecteurs de E , on a : $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$. En particulier, pour tout couple (i, j) de $[1, n]^2$: $\langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle$. Comme la base \mathcal{B} est orthonormale, on en déduit :

$$\langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}. \text{ Ainsi, la famille } \mathcal{B}' \text{ est une famille orthonormale de } E. \text{ Comme elle est formée de } n \text{ vecteurs de } E, \text{ qui est de dimension } n, \text{ on peut conclure que } \mathcal{B}' \text{ est une base orthonormale de } E.$$

Réciproquement, on considère une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E et f , un endomorphisme tel que la famille $\mathcal{B}' = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ soit une base orthonormale de E .

Soit x un vecteur de E . On note x_1, \dots, x_n les coordonnées de x dans la base \mathcal{B} . On a :

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \text{ et } f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i).$$

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n x_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 \text{ car la base } \mathcal{B} \text{ est orthonormale.}$$

$$\text{De la même manière, on a : } \|f(x)\|^2 = \langle f(x), f(x) \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i f(e_i), \sum_{j=1}^n x_j f(e_j) \right\rangle. \text{ Par bilinéarité,}$$

$$\text{on obtient : } \|f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 \text{ (l'avant-dernière égalité provenant du fait que } f \text{ est orthogonal).}$$

Ainsi, pour tout vecteur x de E , on a : $\|f(x)\| = \|x\|$. Grâce à la première question de cette partie, on en déduit que f est orthogonal.

On a montré que f est orthogonal si, et seulement si, f transforme toute base orthonormale de E en une base orthonormale de E .

3. • Soit f un endomorphisme orthogonal de E . On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E et M la matrice de f dans la base \mathcal{B} . Par définition de la matrice d'un endomorphisme dans

une base, les colonnes de M sont les coordonnées de $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$ dans la base \mathcal{B} donc M est la matrice de passage de la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ à la famille $\mathcal{B}' = (f(e_1), \dots, f(e_n))$. Comme f est orthogonal et comme \mathcal{B} est orthonormale, la famille \mathcal{B}' est, d'après la question précédente, une base orthonormale de E . Ainsi, M est la matrice de passage entre deux bases orthonormales. La matrice M est donc orthogonale.

• Réciproquement, on considère une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E et f , un endomorphisme tel que la matrice M de f dans la base \mathcal{B} soit orthogonale. La matrice M vérifie donc l'égalité : ${}^tMM = I$.

Soit x un vecteur de E . On note (x_1, \dots, x_n) les coordonnées de x dans la base \mathcal{B} et (y_1, \dots, y_n) les coordonnées du vecteur $f(x)$ dans la base \mathcal{B} . Soit X et Y les matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définies

par : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. On sait que : $Y = MX$. Comme la base \mathcal{B} est orthonormale, on a :

$$\|f(x)\|^2 = {}^tYY = {}^t(MX)MX = {}^tX{}^tMMX = {}^tXX = \|x\|^2.$$

Ainsi, pour tout vecteur x de E , on a : $\|f(x)\| = \|x\|$. Grâce à la première question de cette partie, on en déduit que f est orthogonal.

On a montré que f est orthogonal si, et seulement si, la matrice de f dans une base orthonormale de E est orthogonale.

Kholle 2 A)

1. a) Soit x et y deux vecteurs de E . On note (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_n) les coordonnées respectives de x et y dans la base \mathcal{B} . Soit X et Y les matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définies par :

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Les coordonnées des vecteurs $u(x)$ et $u^*(x)$, dans la base \mathcal{B} , sont

données respectivement par les produits matriciels MX et tMY .

Comme la base \mathcal{B} est orthonormale, on a :

$$\langle u(x), y \rangle = {}^t(MX)Y = {}^tX{}^tMY = {}^tX({}^tMY) = \langle x, u^*(y) \rangle.$$

b) Soit v un endomorphisme de E et y un vecteur quelconque de E . Pour tout vecteur x de E , on a : $\langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$. Par définition de u^* , on en déduit : $\langle x, v(y) \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$.

On a donc, pour tout vecteur x de E : $\langle x, (v - u^*)(y) \rangle = 0$. On en déduit que $(v - u^*)(y)$ appartient à E^\perp , ce qui signifie que : $(v - u^*)(y) = 0$. Ceci étant vrai pour tout vecteur y de E , on a : $v = u^*$. On a bien montré que u^* est le seul endomorphisme de E qui vérifie :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$$

2. Si $u = u^*$, on a : $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$.

Ainsi, u est un endomorphisme symétrique de E .

Réciproquement, si u est un endomorphisme symétrique, on a :

$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$.

D'après la question 1.b), u^* est le seul endomorphisme tel que $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$, on en déduit que : $u^* = u$.

3. Soit y un vecteur de F^\perp . Par définition de u^* , pour tout vecteur x de F , on a :

$\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$. Comme x appartient à F qui est stable par u , alors $u(x)$ appartient à F .

On en déduit : $\langle u(x), y \rangle = 0$ puisque y appartient à F^\perp .

Finalement, pour tout vecteur x de F , on a : $\langle x, u^*(y) \rangle = 0$. Ainsi, $u^*(y)$ appartient à F^\perp .

On en déduit que F^\perp est stable par u^* .

Kholle A 3)

1. a) Si a est une racine d'ordre au moins $n+1$ de P , alors il existe un polynôme Q tel que : $P = (X - a)^{n+1} Q$. Si Q n'est pas le polynôme nul, alors on a : $\deg P = n+1 + \deg Q \geq n+1$. C'est absurde car P est élément de E . On en conclut que Q est nécessairement le polynôme nul. Finalement, P est le polynôme nul.

b) Soit P_1, P_2 et Q trois éléments de E et λ un réel.

• On constate que $\varphi(P, Q)$ est réel.

• $\varphi(P, Q) = \sum_{i=0}^n P^{(i)}(a) Q^{(i)}(a) = \sum_{i=0}^n Q^{(i)}(a) P^{(i)}(a)$. Ainsi, on a : $\varphi(P, Q) = \varphi(Q, P)$.

• $\varphi(\lambda P_1 + P_2, Q) = \sum_{i=0}^n (\lambda P_1 + P_2)^{(i)}(a) Q^{(i)}(a) = \sum_{i=0}^n (\lambda P_1^{(i)}(a) + P_2^{(i)}(a)) Q^{(i)}(a)$, grâce à la linéarité de la dérivation.

On en déduit : $\varphi(\lambda P_1 + P_2, Q) = \lambda \sum_{i=0}^n P_1^{(i)}(a) Q^{(i)}(a) + \sum_{i=0}^n P_2^{(i)}(a) Q^{(i)}(a)$

Finalement, on a : $\varphi(\lambda P_1 + P_2, Q) = \lambda \varphi(P_1, Q) + \varphi(P_2, Q)$.

• $\varphi(P, P) = \sum_{i=0}^n (P^{(i)}(a))^2 \geq 0$, en tant que somme de carrés.

• Si $\varphi(P, P) = 0$, alors $\sum_{i=0}^n (P^{(i)}(a))^2 = 0$.

Une somme de réels positifs est nulle si et seulement si tous les termes de la somme sont nuls. On obtient : $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P^{(i)}(a) = 0$. On en déduit que a est racine multiple de P avec un ordre au moins égal à $n+1$ donc d'après la question 1.a), P est nul. Ainsi : $\varphi(P, P) = 0 \Rightarrow P = 0$. On en conclut que φ est un produit scalaire sur E .

2. a) Pour tout couple (i, j) de $\llbracket 0, n \rrbracket^2$, on a : $\langle P_i, P_j \rangle = \sum_{k=0}^n P_i^{(k)}(a) P_j^{(k)}(a)$.

On sait que : $\forall k \in \llbracket 0, i \rrbracket, P_i^{(k)} = \frac{i!}{(i-k)!} (X-a)^{i-k}$ et $\forall k > i, P_i^{(k)} = 0$.

On en déduit que pour tout k de $\llbracket 0, n \rrbracket$: $P_i^{(k)}(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \\ i! & \text{si } k = i \end{cases}$

De même, pour tout k de $\llbracket 0, n \rrbracket$, on a : $P_j^{(k)}(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ j! & \text{si } k = j \end{cases}$.

Par conséquent, pour tout i différent de j , on a : $P_i^{(k)}(a) P_j^{(k)}(a) = 0$

Finalement, pour tout couple (i, j) de $\llbracket 0, n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, on a : $\langle P_i, P_j \rangle = \sum_{k=0}^n 0 = 0$.

La famille (P_0, \dots, P_n) est constituée de $n+1$ polynômes non nuls de E , qui est de dimension $n+1$. Ainsi, grâce au **théorème 5.1**, la famille (P_0, \dots, P_n) est une base orthogonale de E .

\Rightarrow Méthode 5.1

b) Pour tout entier naturel i , on a : $\|P_i\|^2 = \sum_{k=0}^n (P_i^{(k)}(a))^2$.

D'après la question 2.a), seul le terme d'indice $k = i$ n'est pas nul dans cette somme, et ce terme vaut $(i!)^2$. Pour tout i de $\llbracket 0, n \rrbracket$, on a donc $\|P_i\|^2 = (i!)^2$, d'où : $\|P_i\| = i!$.

On pose alors : $Q_i = \frac{1}{i!} (X-a)^i$ et on a $\|Q_i\| = 1$. Comme la famille (P_0, \dots, P_n) est une base orthogonale de E , la famille $\mathcal{B} = (Q_0, \dots, Q_n)$, ainsi construite, est une base orthonormale de E .

3. Pour tout i de $\llbracket 0, n \rrbracket$, la $i^{\text{ème}}$ coordonnée d'un élément P de E dans la base orthonormale \mathcal{B} est $\langle P, Q_i \rangle$. Or $Q_i^{(k)}(a) = \frac{1}{i!} P_i^{(k)}(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \\ 1 & \text{si } k = i \end{cases}$ donc : $\langle P, Q_i \rangle = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(a) Q_i^{(k)}(a) = P^{(i)}(a)$.

Ainsi, pour tout i de $\llbracket 0, n \rrbracket$, la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de P dans la base \mathcal{B} est $P^{(i)}(a)$.

On a donc : $P = \sum_{i=0}^n P^{(i)}(a) Q_i$ et, grâce à la question 2.b), on obtient : $P = \sum_{i=0}^n \frac{P^{(i)}(a)}{i!} (X-a)^i$.

On retrouve ainsi la formule de Taylor pour les polynômes.

Bonus :

Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ deux vecteurs de \mathbb{R}^n . L'inégalité de Cauchy-Schwarz, dans l'espace euclidien \mathbb{R}^n muni du produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n , s'énonce ainsi :

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2, \text{ c'est-à-dire } \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right).$$

Pour tout k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, posons : $x_k = k$ et $y_k = \sqrt{k}$. Ainsi : $\left(\sum_{k=1}^n k\sqrt{k} \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n k \right)$.

$$\text{On en déduit : } \left(\sum_{k=1}^n k\sqrt{k} \right)^2 \leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \times \frac{n(n+1)}{2}.$$

Comme $\sum_{k=1}^n k\sqrt{k}$ est positive (en tant que somme de termes positifs), on en conclut, grâce à la

croissance de la fonction racine carrée sur \mathbb{R}_+ : $\sum_{k=1}^n k\sqrt{k} \leq \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{12}}$.

Finalement, puisque $n(n+1)$ est positif, on a : $\sum_{k=1}^n k\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$.

Soit x_1, \dots, x_n des réels strictement positifs. On pose : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $y_k = \sqrt{x_k}$ et $z_k = \frac{1}{\sqrt{x_k}}$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz, appliquée aux vecteurs $y = (y_1, \dots, y_n)$ et $z = (z_1, \dots, z_n)$ de \mathbb{R}^n ,

$$\text{s'écrit : } \left(\sum_{k=1}^n y_k z_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n z_k^2 \right).$$

On obtient alors : $\left(\sum_{k=1}^n 1 \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right)$. On en conclut : $n^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right)$.

D'après le **théorème 4.3**, il y a égalité si, et seulement si, la famille (y, z) est liée, c'est-à-dire, comme z n'est pas nul, si, et seulement si, il existe un réel α tel que $y = \alpha z$.

$$\text{On a : } y = \alpha z \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, y_k = \alpha z_k \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sqrt{x_k} = \alpha \frac{1}{\sqrt{x_k}} \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k = \alpha.$$

Pour conclure, on a : $n^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right)$, avec égalité si, et seulement si, $x_1 = \dots = x_n$.

1. Notons p le projecteur orthogonal sur $\mathbb{R}_2[X]$. On sait que $p(X^3)$ est défini par les deux conditions : $p(X^3) \in \mathbb{R}_2[X]$ et $X^3 - p(X^3) \in \mathbb{R}_2[X]^\perp$.

• $p(X^3) \in \mathbb{R}_2[X] \Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, p(X^3) = aX^2 + bX + c$. On en déduit :

$$X^3 - p(X^3) = X^3 - aX^2 - bX - c.$$

$$\bullet X^3 - p(X^3) \in \mathbb{R}_2[X]^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} \langle X^3 - p(X^3), 1 \rangle = 0 \\ \langle X^3 - p(X^3), X \rangle = 0 \\ \langle X^3 - p(X^3), X^2 \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_0^{+\infty} (t^3 - at^2 - bt - c)e^{-t} dt = 0 \\ \int_0^{+\infty} (t^4 - at^3 - bt^2 - ct)e^{-t} dt = 0 \\ \int_0^{+\infty} (t^5 - at^4 - bt^3 - ct^2)e^{-t} dt = 0 \end{cases}$$

On rappelle que, pour tout n de \mathbb{N} , on a : $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$.

$$\text{On en déduit : } X^3 - p(X^3) \in \mathbb{R}_2[X]^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 2a - b - c = 0 \\ 24 - 6a - 2b - c = 0 \\ 120 - 24a - 6b - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = -18 \text{ (après calculs)} \\ c = 6 \end{cases}$$

On en conclut : $p(X^3) = 9X^2 - 18X + 6$.

2. a) On a : $f(a, b, c) = \int_0^{+\infty} e^{-t} (t^3 - (at^2 + bt + c))^2 dt$.

On obtient ainsi : $f(a, b, c) = \|X^3 - (aX^2 + bX + c)\|^2 = \|X^3 - P\|^2$.

b) $\{ \|X^3 - P\|, P \in \mathbb{R}_2[X] \}$ admet un minimum atteint en un unique polynôme P_0 de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par : $P_0 = p(X^3)$.

D'après la question 1, on a : $P_0 = 9X^2 - 18X + 6$.

D'après la question 2.a), on a : $\min_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} f(a, b, c) = \min_{P \in \mathbb{R}_2[X]} \|X^3 - P\|^2 = \|X^3 - P_0\|^2$.

Or, on peut vérifier, que : $\|X^3 - p(X^3)\|^2 = \|X^3\|^2 - \langle X^3, p(X^3) \rangle$.

$$\text{On a : } \bullet \|X^3\|^2 = \int_0^{+\infty} t^6 e^{-t} dt = 720.$$

$$\bullet \langle X^3, p(X^3) \rangle = \int_0^{+\infty} t^3 (9t^2 - 18t + 6) e^{-t} dt = 9 \times 5! - 18 \times 4! + 6 \times 3! = 684.$$

$$\text{On obtient donc : } \|X^3 - P_0\|^2 = 36.$$

On déduit de la question 1 que f possède un minimum atteint en un unique triplet $(9, -18, 6)$ et que ce minimum vaut 36.

Kholle C :

1. Question de cours.

2. a) L'application f est linéaire par linéarité à droite du produit scalaire.

$$\text{De plus, si } x, y \in E, \langle f(x) | y \rangle = \sum_{k=1}^n \langle e_k | x \rangle \langle e_k | y \rangle.$$

On constate que dans l'expression qu'on vient d'obtenir pour $\langle f(x) | y \rangle$, x et y jouent des rôles symétriques donc $\langle f(x) | y \rangle = \langle f(y) | x \rangle$ ce qui prouve que f est symétrique.

b) Soit λ une valeur propre de f et x un vecteur propre associé.

$$\text{Alors } \langle f(x) | x \rangle = \sum_{k=1}^n \langle e_k | x \rangle^2 > 0 \text{ car } x \text{ étant non nul, l'un au moins des } \langle e_k | x \rangle \text{ est non nul.}$$

$$\text{D'autre part, } \langle f(x) | x \rangle = \lambda \|x\|^2. \text{ Donc } \lambda = \frac{\langle f(x) | x \rangle}{\|x\|^2} > 0.$$

En particulier, 0 n'est pas valeur propre de f donc f est bijectif.

3. L'application θ est clairement linéaire. Son noyau est réduit au polynôme nul car un polynôme de degré inférieur ou égal à $p-1$ admettant p racines distinctes est nécessairement nul. De plus, $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ et \mathbb{R}^p sont deux espaces vectoriels de même dimension finie égale à p donc l'application θ est un isomorphisme.

4. a) On a d'une part, $f(f^{-1}(e_j)) = e_j$ et, par définition de f , $f(f^{-1}(e_j)) = \sum_{k=1}^n \langle e_k | f^{-1}(e_j) \rangle e_k$.

Par unicité de la décomposition de e_j dans la base (e_1, \dots, e_n) , on en déduit que pour tout

$$k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle e_k | f^{-1}(e_j) \rangle = \delta_{k,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

b) Notons p le nombre de valeurs propres distinctes de f . D'après 3., il existe un (unique) polynôme P de degré au plus $p-1$ tel que pour toute valeur propre λ de f , on ait $P(\lambda) = \sqrt{\lambda^{-1}}$.

On a alors pour tout vecteur propre x de f de valeur propre associée λ , $P(f)^2(x) = P(\lambda)^2 x = \lambda^{-1} x = f^{-1}(x)$ donc $P(f)^2 = f^{-1}$ puisqu'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f .

c) Remarquons que f étant symétrique, toutes les puissances de f le sont également donc $g = P(f)$ est un endomorphisme symétrique de E .

On a donc pour tout $(k, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $\langle g(e_k) | g(e_j) \rangle = \langle e_k | g^2(e_j) \rangle = \langle e_k | f^{-1}(e_j) \rangle = \delta_{k,j}$ donc la famille $(g(e_1), \dots, g(e_n))$ est orthonormale, et étant de cardinal $n = \dim E$, c'est une base orthonormée de E .