Correction kholles 19/10/2021 :

1) Soit $x \geq 1$, $\int_1^x \frac{\ln(t)}{t} dt = \left[\frac{\ln(t)^2}{2}\right]_1^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ Ainsi $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t} dt$ diverge.

$\frac{1}{e^t - 1} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t}$ donc, $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$ divergent, $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1}$ diverge.

$\left|\frac{\cos(t)}{e^t}\right| \leq \frac{1}{e^t}$ et $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge
$\forall t \geq 1$ donc, par CIFP, $\int_e^{+\infty} \frac{\cos(t)}{e^t} dt$ converge abs donc CV.

2) Soit $x \in]0;1]$, $\int_x^1 \frac{\cos(t)}{\sqrt{\sin(t)}} dt \underset{\substack{u = \sin(t) \\ du = \cos(t) dt}}{=} \int_{\sin(x)}^{\sin(1)} \frac{1}{\sqrt{u}} du = \left[2\sqrt{u}\right]_{\sin(x)}^{\sin(1)}$
$= 2\sqrt{\sin(1)} - 2\sqrt{\sin(x)}$
$\xrightarrow[x \to 0]{} 2\sqrt{\sin(1)}$

Ainsi $\int_0^1 \frac{\cos(t)}{\sqrt{\sin(t)}} dt$ CV et $\int_0^1 \frac{\cos(t)}{\sqrt{\sin(t)}} dt = 2\sqrt{\sin(1)}$

Comme $\ln(1 + \frac{1}{t^2}) \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^2}$ alors, $\int_0^1 \frac{1}{t^2} dt$ divergent alors $\int_0^1 \ln(1 + \frac{1}{t^2}) dt$ diverge par CIFP.

5)

$$\int_x^{x+1} f(t) dt = \int_0^{x+1} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt$$
$$\xrightarrow[x \to +\infty]{} \int_0^{+\infty} f(t) dt - \int_0^{+\infty} f(t) dt = 0$$

car $\int_0^x f(t) dt \xrightarrow[x \to +\infty]{} \int_0^{+\infty} f(t) dt$

3)

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{3^t}$ est continue sur $[2, +\infty[$. De plus, pour tout x supérieur ou égal à 2, on a : $\int_2^x \frac{1}{3^t} dt = \int_2^x e^{-t\ln 3} dt = \left[-\frac{e^{-t\ln 3}}{\ln 3}\right]_2^x = -\frac{e^{-x\ln 3}}{\ln 3} + \frac{e^{-2\ln 3}}{\ln 3}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x\ln 3} = 0$, on obtient : $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_2^x \frac{1}{3^t} dt = \frac{e^{-2\ln 3}}{\ln 3} = \frac{1}{9\ln 3}$. On a donc : $\alpha = \int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t} dt = \frac{1}{9\ln 3}$.

2. • Comme g est nulle sur $]-\infty, 2[$, elle est positive sur cet intervalle. De plus, g est positive sur $[2, +\infty[$ car α est positif. Ainsi, g est positive sur $\mathbb{R}$.

• De même, la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 2.

• La fonction g étant nulle sur $]-\infty, 2[$, l'intégrale $\int_{-\infty}^2 g(t)dt$ converge et vaut 0.

Pour tout réel x supérieur à 2, on a : $\int_2^x 9\ln 3 \frac{1}{3^t} dt = 9\ln 3 \int_2^x \frac{1}{3^t} dt = 9\ln 3\left(-\frac{e^{-x\ln 3}}{\ln 3} + \frac{e^{-2\ln 3}}{\ln 3}\right)$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x\ln 3} = 0$, on obtient : $\int_2^{+\infty} 9\ln 3 \frac{1}{3^t} dt = 1$. Grâce à la relation de Chasles, $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt$ converge et vaut 1.

En conclusion, g est une densité de probabilité.

⇨ *Méthode 14.3*

3. Considérons, pour tout x supérieur à 2, l'intégrale $\int_2^x t\, e^{-t\ln 3} dt$.

On effectue une intégration par parties avec $u(t) = t$, $v'(t) = e^{-t\ln 3}$, $u'(t) = 1$ et $v(t) = -\frac{e^{-t\ln 3}}{\ln 3}$

Les fonctions u et v étant bien de classe C^1 sur $[2, x]$, on obtient :

$$\int_2^x te^{-t\ln 3} dt = \left[-\frac{te^{-t\ln 3}}{\ln 3}\right]_2^x + \int_2^x \frac{e^{-t\ln 3}}{\ln 3} dt = -\frac{xe^{-x\ln 3}}{\ln 3} + \frac{2e^{-2\ln 3}}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 3}\int_2^x e^{-t\ln 3} dt.$$

On a donc : $\int_2^x te^{-t\ln 3} dt = -\frac{xe^{-x\ln 3}}{\ln 3} + \frac{2}{9\ln 3} + \frac{1}{\ln 3}\int_2^x e^{-t\ln 3} dt$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{xe^{-x\ln 3}}{\ln 3} = 0$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln 3}\int_2^x e^{-t\ln 3} dt = \frac{1}{9(\ln 3)^2}$, l'intégrale $\int_2^{+\infty} te^{-t\ln 3} dt$ est convergente. La variable aléatoire Y a donc une espérance et on a :

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)dt = \int_2^{+\infty} 9\ln 3\, t\, e^{-t\ln 3} dt = 9\ln 3 \int_2^{+\infty} t\, e^{-t\ln 3} dt = 9\ln 3\left(\frac{2}{9\ln 3} + \frac{1}{9(\ln 3)^2}\right) = 2 + \frac{1}{\ln 3}.$$

⇨ *Méthode 14.8*

4. Z prend ses valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, et pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a :

$$P(Z = k) = P(k \le Y < k+1) = \int_k^{k+1} g(t)dt = 9\ln 3 \int_k^{k+1} e^{-t\ln 3} dt = 9\ln 3\left[-\frac{e^{-t\ln 3}}{\ln 3}\right]_k^{k+1}$$

$$P(Z = k) = 9[-e^{-(k+1)\ln 3} + e^{-k\ln 3}] = 9[e^{-k\ln 3}(1 - e^{-\ln 3})] = 9\left(\frac{1}{3}\right)^k \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 6\left(\frac{1}{3}\right)^k.$$

⇨ *Méthode 14.7*

4)

2) $t \longmapsto \ln(t^2+\sin(t))$ est continue sur $]0;1]$

car $\forall x>0$, $x^2+\sin(x)>0$ (prouver le).

Donc on regarde l'impropreté en 0 :

On remarque que $t^2+\sin(t) \underset{0}{\sim} t$ car $\frac{t^2+\sin(t)}{t} = t + \frac{\sin(t)}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$

On montre que $\ln(t^2+\sin(t)) \sim \ln(t)$ car

$$\frac{\ln(t^2+\sin(t))}{\ln(t)} = \frac{\ln(t(t+\frac{\sin(t)}{t}))}{\ln(t)} = \frac{\ln(t)}{\ln(t)} + \frac{\ln(t+\frac{\sin(t)}{t})}{\ln(t)}$$

$$= 1 + \frac{\ln(t+\sin(t)/t)}{\ln(t)} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$$

Or $\forall t \in]0;1]$, $\ln(t)<0$ et

$\int_0^1 \ln(t)dt$ cv car $\int_A^1 \ln(t)dt = [t\ln(t)-t]_A^1$

$= -1 - A\ln(A) + A \underset{A\to 0}{\longrightarrow} 0$ par C.C.

Donc $\int_0^1 \ln(t^2+\sin(t))dt$ cv par C.I.F.N.

6)

On a $f'(x) = f'(0) + \int_0^x f''(t)dt$

donc $f'(x)$ a une limite finie l quand $x \to +\infty$.

et si $l>0$ alors, pour x assez grand, $f'(x) \geq l/2$ donc $f(x) \geq \frac{l}{2}x + m$

ce qui empêche la cv de $\int_0^{+\infty} f(t)dt$.

De même si $l<0$

D'où $l=0$.

f' est continue et converge en $+\infty$ donc est bornée d'où

$\forall t \geq 0 \qquad |f(t)f'(t)| \leq M|f(t)| \leftarrow$ cv (il faut le supposer)

d'où $\int_0^{+\infty} |f(t)f'(t)|dt$ cv aussi

donc $\int_0^{+\infty} f(t)f'(t)dt$ cv.

Kholle B :

1) Soit $x \geq 1$, $\int_1^x \frac{\arctan(t)}{1+t^2} dt = \left[\frac{\arctan(t)^2}{2}\right]_1^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{32} = \frac{3\pi^2}{32}$.

$\left|\frac{\cos(t)}{t\ln(t)^2}\right| \leq \frac{1}{t\ln(t)^2}$ $\forall t \geq 1$, or soit $x \geq e$, $\int_e^x \frac{1}{t\ln(t)^2} dt = \left[\frac{-1}{u}\right]_e^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{1}{e}$.

Donc $\int_e^{+\infty} \frac{1}{t\ln(t)^2} dt$ cv et donc par CIFP, $\int_e^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t\ln(t)^2} dt$ cv abs donc cv.

$\sin\left(\frac{1}{t}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$ donc $\frac{\ln(t)}{\sin\left(\frac{1}{t}\right)^2} \underset{+\infty}{\sim} \ln(t)t^2$ et $\int_1^{+\infty} \ln(t)t^2 dt$ diverge.

donc $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\sin\left(\frac{1}{t}\right)^2} dt$ diverge.

2) Cette intégrale est impropre en $+\infty$ et 0 :

en $+\infty$: $\frac{t-\sin(t)}{t^\alpha} \sim \frac{t}{t^\alpha} = \frac{1}{t^{\alpha-1}}$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{t-\sin(t)}{t^\alpha} dt$ a la même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha-1}} dt$ donc cv ssi $\alpha - 1 > 1$ ssi $\alpha > 2$.

en 0 : $\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + o_0(t^3)$ donc $t - \sin(t) \underset{0}{\sim} \frac{t^3}{6}$ et $\frac{t-\sin(t)}{t^\alpha} \underset{0}{\sim} \frac{1}{6t^{\alpha-3}}$

Donc $\int_0^1 \frac{t-\sin(t)}{t^\alpha} dt$ cv ssi $\alpha - 3 < 1$ donc $\alpha < 4$

Ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin(t)}{t^\alpha} dt$ cv ssi $\alpha \in]2;4[$.

3)

1. • La restriction de f à $]-\infty, 0[$ est nulle donc positive ou nulle. La restriction de f à $[0, +\infty[$ est positive car x est positif et la fonction exponentielle est positive.
La fonction f est donc positive sur $\mathbb{R}$.

• La restriction de f à $]-\infty, 0[$ est nulle donc continue. La restriction de f à $[0, +\infty[$ est une fonction usuelle, continue sur $[0, +\infty[$.
La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en 0.

• Comme f est nulle sur $]-\infty, 0[$, alors $\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt$ converge et est égale à 0.

Pour tout $x \geq 0$, on a : $\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x t e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^x = -e^{-\frac{x^2}{2}} + 1.$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$, on peut conclure que $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut 1.

Grâce à la relation de Chasles, on a bien : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut 1.

• Conclusion : la fonction f est une densité.

⇨ *Méthode 1*

2. a) On sait : $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

• Si x est strictement négatif, on a : $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$.

• Si x est positif ou nul, on a : $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^x t e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^x = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}$.

⇨ *Méthode 14.1*

b) Par définition de la fonction de répartition, on a : $P(X \leq \mu) = F(\mu)$.
Comme $F(x) = 0$ pour tout réel x négatif, μ est nécessairement positif.

On cherche donc à résoudre : $1 - e^{-\frac{\mu^2}{2}} = \frac{1}{2}$. $\quad (E)$

On a alors : $(E) \Leftrightarrow e^{-\frac{\mu^2}{2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{\mu^2}{2} = -\ln 2 \Leftrightarrow \mu^2 = 2\ln 2$.

Comme μ est positif, on en conclut que la médiane de X vaut $\sqrt{2\ln 2}$.

3. La fonction f est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et positive sur $\mathbb{R}_+$. Le maximum de f, s'il existe, est donc atteint sur $\mathbb{R}_+$. Etudions alors f sur $\mathbb{R}_+$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout x strictement positif, on a :

$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}(1 - x^2)$.

On en déduit que $f'(x)$ est du signe de $1 - x^2$ sur $\mathbb{R}_+$.
La fonction f est donc croissante sur $[0, 1]$ puis décroissante sur $[1, +\infty[$, elle atteint donc un maximum en 1 (qui vaut $e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$). On en déduit que la variable X n'a qu'un seul mode et que ce mode vaut $M_0 = 1$.

4. a) Notons G la fonction de répartition de la variable Y.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = P(Y \leq x)$. De plus, on a : $(Y \leq x) = (X^2 \leq x)$.

- Si x est strictement négatif, l'événement $(X^2 \leq x)$ est impossible, on a donc : $G(x) = 0$.
- Si x est positif ou nul, on a : $(Y \leq x) = (X^2 \leq x) = (-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x})$.

On en déduit : $G(x) = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x})$ et comme $-\sqrt{x}$ est négatif, on a : $F(-\sqrt{x}) = 0$.

On en déduit : $\forall x \geq 0, G(x) = 1 - e^{-\frac{(\sqrt{x})^2}{2}} = 1 - e^{-\frac{x}{2}}$.

⇨ Méthode

4)

2) $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n} \in C^0(\mathbb{R})$ donc on regarde les impropreté en $+\infty$ et $-\infty$

Or, $\frac{1}{(t^2+1)^n} \sim \frac{1}{t^{2n}}$ et $2n > 1$ car $n > 1$

donc par C.I.F.P $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ cv (c'est très bref ici)

b) $\int_0^A \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan(A) - \arctan(0) \xrightarrow[A \to +\infty]{} \pi/2$

et par parité $I_n = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$. De plus, $\forall A > 0$

$$\int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^n} dt = \left[t \times \frac{1}{(1+t^2)^n} \right]_0^A - \int_0^A t \frac{-2nt}{(1+t^2)^{n+1}} dt$$

$$\boxed{\begin{matrix} u' = 1 & u = t \\ v = \frac{1}{(1+t^2)^n} & v' = \frac{-2nt}{(1+t^2)^{n+1}} \end{matrix}}$$

$$= \frac{A}{(1+A^2)^n} + 2n \int_0^A \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt$$

$$= \frac{A}{(1+A^2)^n} + 2n \left(\int_0^A \frac{1+t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt - \int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} dt \right)$$

$$\xrightarrow[A \to +\infty]{} 2n(I_n - I_{n+1})$$

Bonus :

soit $q \in]l;1[$, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que

$\forall x \geq A \quad \dfrac{f(x+1)}{f(x)} \leq q$ et donc $\forall x \geq A,\ f(x+1) \leq q f(x)$.

$$\int_A^{A+n} f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_A^{A+1} f(t+k)\,dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_A^{A+1} q^k f(t)\,dt = \int_A^{A+1} f(t) \sum_{k=0}^{n-1} q^k\,dt$$

car $\displaystyle\int_{A+k}^{A+k+1} f(t)\,dt = \int_A^{A+1} f(u+k)\,du$

$u = t-k$

D'où $\displaystyle\int_A^{A+n} f(t)\,dt \leq \frac{1}{1-q} \int_A^{A+1} f(t)\,dt = M$

D'où, $\displaystyle\int_A^{+\infty} f(t)\,dt$ converge car $\displaystyle\int_A^{x} f(t)\,dt$ majorée et f positive !