Correction kholles 12/10/2021 :

1) Soit $x \geq 1$, $\int_1^x \frac{\ln(t)}{t}dt = \left[\frac{\ln(t)^2}{2}\right]_1^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ Ainsi $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t}dt$ diverge.

$\frac{1}{e^t - 1} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t}$ donc, $\int_0^1 \frac{1}{t}dt$ divergeant, $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1}$ diverge.

$\frac{|\cos(t)|}{e^t} \leq \frac{1}{e^t}$ et $\int_e^{+\infty} e^{-t}dt$ converge

$\forall t \geq 1$ donc, par CIFP, $\int_e^{+\infty} \frac{\cos(t)}{e^t}dt$ converge abs donc CV.

2) Soit $x \in]0;1]$, $\int_x^1 \frac{\cos(t)}{\sqrt{\sin(t)}}dt \underset{\substack{u = \sin(t) \\ du = \cos(t)dt}}{=} \int_{\sin(x)}^{\sin(1)} \frac{1}{\sqrt{u}}du = \left[2\sqrt{u}\right]_{\sin(x)}^{\sin(1)}$

$= 2\sqrt{\sin(1)} - 2\sqrt{\sin(x)}$

$\xrightarrow[x \to 0]{} 2\sqrt{\sin(1)}$

Ainsi $\int_0^1 \frac{\cos(t)}{\sqrt{\sin(t)}}dt$ cv et $\int_0^1 \frac{\cos(t)}{\sqrt{\sin(t)}}dt = 2\sqrt{\sin(1)}$

Comme $\ln(1 + \frac{1}{t^2}) \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^2}$ alors, $\int_0^1 \frac{1}{t^2}dt$ divergeant alors $\int_0^1 \ln(1 + \frac{1}{t^2})dt$ diverge par CIFP.

4) $\int_x^{x+1} f(t)dt = \int_0^{x+1} f(t)dt - \int_0^x f(t)dt$

$\xrightarrow[x \to +\infty]{} \int_0^{+\infty} f(t)dt - \int_0^{+\infty} f(t)dt = 0$

car $\int_0^x f(t)dt \xrightarrow[x \to +\infty]{} \int_0^{+\infty} f(t)dt$.

3)

2) $t \longmapsto \ln(t^2+\sin(t))$ est continue sur $]0;1]$

car $\forall x>0$, $x^2+\sin(x)>0$ (prouver le).

Donc on regarde l'impropreté en 0.

On remarque que $t^2+\sin(t) \underset{0}{\sim} t$ car $\frac{t^2+\sin(t)}{t} = t + \frac{\sin(t)}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$

On montre que $\ln(t^2+\sin(t)) \sim \ln(t)$ car

$$\frac{\ln(t^2+\sin(t))}{\ln(t)} = \frac{\ln(t(t+\frac{\sin(t)}{t}))}{\ln(t)} = \frac{\ln(t)}{\ln(t)} + \frac{\ln(t+\frac{\sin(t)}{t})}{\ln(t)}$$

$$= 1 + \frac{\ln(t+\sin(t)/t)}{\ln(t)} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$$

Or $\forall t \in]0;1]$, $\ln(t)<0$ et

$\int_0^1 \ln(t)dt$ cv car $\int_A^1 \ln(t)dt = [t\ln(t)-t]_A^1$

$$= -1 - A\ln(A) + A \underset{A\to 0}{\longrightarrow} 0 \text{ par C.C.}$$

Donc $\int_0^1 \ln(t^2+\sin(t))dt$ cv par C.I.F.N.

5)

3) $x \overset{f}{\longmapsto} \dfrac{1}{x\,\ln(x)^a}$ est $C^0([e;+\infty[)$

On pose $u = \ln(x)$: $x = e^u$, $du = \dfrac{1}{x}dx$

$$\int_e^A \frac{dx}{x\ln(x)^a} = \int_1^{\ln(A)} \frac{du}{u^a}$$

Donc $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln(x)^a}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^a}$ sont de même nature.

Donc $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln(x)^a}$ converge ssi $a > 1$.

Soit $x \geq e$, $f'(x) = \dfrac{-(\ln(x)^a + a(\ln(x))^{a-1})}{(x\ln(x)^a)^2}$

$= \dfrac{-\ln(x)^{a-1}(\ln(x) + a)}{(x\ln(x)^a)^2}$

Comme $a > 0$, $f'(x) < 0$

donc f est $\searrow$ sur $[e;+\infty[$

donc $\forall n, \forall x \in [n;n+1]$ $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$

d'où $f(n+1) \leq \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n) \quad \forall n \geq 3$

et $\displaystyle\sum_{n=3}^{N} f(n+1) \leq \int_3^{N+1} f(x)\,dx \leq \sum_{n=3}^{N} f(n)$

Donc $\displaystyle\int_3^{+\infty} f(x)\,dx$ cv ssi $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} f(n)$ cv

D'où $\displaystyle\sum \frac{1}{n\ln(n)^a}$ cv ssi $a > 1$

6) On a $f'(x) = f'(0) + \int_0^x f''(t)\,dt$

donc $f'(x)$ a une limite finie ℓ quand $x \to +\infty$.

et si $\ell > 0$ alors, pour x assez grand, $f'(x) \geq \ell/2$ donc $f(x) \geq \frac{\ell x}{2} + m$

ce qui empêche la cv de $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$

De m̂ si $\ell < 0$

D'où $\ell = 0$.

f' est continue et converge en $+\infty$ donc est bornée d'où

$\forall t \geq 0 \qquad |f(t) f'(t)| \leq M |f(t)| \leftarrow$ cv (il faut le supposer)

d'où $\int_0^{+\infty} |f(t) f'(t)|\,dt$ cv aussi

donc $\int_0^{+\infty} f(t) f'(t)\,dt$ cv.

7) Regardons $\int_0^{+\infty} \exp(t - e^t)\,dt$.

Soit $x > 0$, $\displaystyle\int_0^x \exp(t - e^t)\,dt \underset{\substack{u = e^t \\ du = e^t dt}}{=} \int_1^{e^x} \exp(t)\exp(-e^t)\,dt = \int_1^{e^x} e^{-u}\,du = \left[-e^{-u}\right]_1^{e^x}$

$= -e^{-e^x} + e^{-1}$

$\xrightarrow[x \to +\infty]{} \cancel{0} - 1 = -1$

Regardons $\int_{-\infty}^0 \exp(t - e^t)\,dt$.

Soit $x \leq 0$, $\displaystyle\int_x^0 \exp(t - e^t)\,dt \underset{\substack{u = e^t \\ du = e^t dt}}{=} \int_{e^x}^1 e^{-u}\,du = \left[-e^{-u}\right]_{e^x}^1 = -e^{-1} + e^{-e^x}$

$\xrightarrow[x \to -\infty]{} 1 - e^{-1}$

Kholle B :

1) Soit $x \geq 1$, $\int_1^x \frac{\arctan(t)}{1+t^2}dt = \left[\frac{\arctan(t)^2}{2}\right]_1^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{32} = \frac{3\pi^2}{32}$.

$\left|\frac{\cos(t)}{t\ln(t)^2}\right| \leq \frac{1}{t\ln(t)^2}$ $\forall t \geq 1$, or soit $x \geq e$, $\int_e^x \frac{1}{t\ln(t)^2}dt = \left[\frac{-1}{u}\right]_e^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{e}$.

Donc $\int_e^{+\infty}\frac{1}{t\ln(t)^2}dt$ cv et donc par CIFP, $\int_e^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t\ln(t)^2}dt$ cv abs donc cv.

$\sin\left(\frac{1}{t}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$ donc $\frac{\ln(t)}{\sin\left(\frac{1}{t}\right)^2} \underset{+\infty}{\sim} \ln(t)t^2$ et $\int_1^{+\infty}\ln(t)t^2dt$ diverge.
donc $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t)}{\sin\left(\frac{1}{t}\right)^2}dt$ diverge.

2) Cette intégrale est impropre en $+\infty$ et 0.

en $+\infty$: $\frac{t-\sin(t)}{t^\alpha} \sim \frac{t}{t^\alpha} = \frac{1}{t^{\alpha-1}}$ donc $\int_1^{+\infty}\frac{t-\sin(t)}{t^\alpha}dt$ a la même nature que $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{\alpha-1}}dt$ donc cv ssi $\alpha-1>1$ ssi $\alpha>2$.

en 0 : $\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + o_0(t^3)$ donc $t-\sin(t) \underset{0}{\sim} \frac{t^3}{6}$ et $\frac{t-\sin(t)}{t^\alpha} \underset{0}{\sim} \frac{1}{6t^{\alpha-3}}$

Donc $\int_0^1 \frac{t-\sin(t)}{t^\alpha}dt$ cv ssi $\alpha-3<1$ donc $\alpha<4$

Ainsi $\int_0^{+\infty}\frac{t-\sin(t)}{t^\alpha}dt$ cv ssi $\alpha \in]2;4[$.

3) $\cancel{\frac{\sin(t)}{\sqrt{1-t^4}} \underset{0}{\sim} \sin(t) \text{ et}}$ donc $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{\sqrt{1-t^4}}dt$ est impropre en 1

Or $1-t^4 = (1-t)(1+t)(1+t^2) \underset{1}{\sim} 4(1-t)$

Donc $\frac{\sin(t)}{\sqrt{1-t}} \underset{1}{\sim} \frac{\sin(1)}{2\sqrt{1-t}}$ donc, comme $\sqrt{1-t} = (1-t)^{1/2}$ et $1/2 < 1$ alors $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{\sqrt{1-t^4}}dt$ cv.

4) a) comme $\frac{e^{-t^2}}{t} = o_{+\infty}(e^{-t^2/2})$ car $\frac{e^{-t^2/2}}{t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

car $\lim_{t \to +\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{t} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{2x}} = 0$ par C.C.

et que $\int_3^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$ cv (car $0 \leq e^{-t^2/2} \leq e^{-t}$ car $\frac{t^2}{2} \geq t$ pour $t \geq 3$)

alors $\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$ cv.

b) Comme $g(t) = \frac{e^{-t^2}}{t}$ est continue sur $[x, +\infty[$, $\forall x > 0$

alors g admet une primitive $G \in C^1(]0, +\infty[)$

et donc $f(x) = \lim_{X \to +\infty} G(X) - G(x) \in C^1(]0, +\infty[)$

Or $\int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{t} dt$ diverge vers $+\infty$ car $\frac{e^{-t^2}}{t} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t}$ et $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$ diverge.

Donc $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$ et f n'est pas prolongeable en 0.

c) Soit $x \geq 1$ $\forall t \geq x$, $0 \leq e^{-t^2} \leq t^2 e^{-t^2}$

donc $\forall X \geq x$, $0 \leq \int_x^X \frac{e^{-t^2}}{t} dt \leq \int_x^X t e^{-t^2} dt = \left[\frac{e^{-t^2}}{-2}\right]_x^X = \frac{e^{-X^2} - e^{-x^2}}{-2}$

Ainsi, quand $X \to +\infty$, $0 \leq f(x) \leq \frac{e^{-x^2}}{2}$

d) $1 - e^{-t^2} \underset{0}{\sim} -t^2$ donc $\int_0^1 \frac{1-e^{-t^2}}{t} dt$ cv car $\int_0^1 -t\, dt$ cv par CIFN.

Donc $\lim_{x \to 0} h(x)$ existe (on l'a renommé $h(x)$)

On a par majoration, cf (c), que comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-x^2} dx$ cv alors $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ cv.

Soit $x \in]0;1]$
$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t} dt = \int_x^1 \frac{e^{-t^2}}{t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t} dt - g(x) + \int_x^1 \frac{1}{t} dt = K - g(x) + \int_x^1 \frac{1}{t} dt = K - \ln(x) - g(x)$

Or $\int_0^1 K - \ln(x) - g(x) dx$ cv

5)

2) $\dfrac{1-\tan(t/2)^2}{1+\tan(t/2)^2} = \dfrac{1-\dfrac{\sin(t/2)^2}{\cos(t/2)^2}}{1+\dfrac{\sin(t/2)^2}{\cos(t/2)^2}} = \dfrac{\cos(t/2)^2-\sin(t/2)^2}{\cos(t/2)^2+\sin(t/2)^2} = \cos(t/2)^2-(1-\cos(t/2)^2) = 2\cos(t/2)^2-1$

Or $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$
$\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$

$\left(\begin{array}{l}\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)\\ \sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a)\end{array}\right)$

donc $\cos(a)\cos(b)=\dfrac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$

d'où $\cos(t/2)^2 = \dfrac{\cos(t)+\cos(0)}{2} = \dfrac{\cos(t)+1}{2}$.

Ainsi $2\cos(t/2)^2-1=\cos(t)$.

$\displaystyle\int_0^\pi \frac{dt}{2+\cos(t)}$ existe car $t \longmapsto \dfrac{1}{2+\cos(t)} \in C^0([0;\pi])$

car ~~$\dfrac{1}{2+\cos(t)}$~~ $2+\cos(t)>0$.

De plus $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dt}{2+\cos(t)} \underset{u=\tan(t/2)}{=} \int_0^{+\infty} \frac{1}{2+\frac{1-u^2}{1+u^2}} \times \frac{2du}{1+u^2}$

$\left(\begin{array}{l} du=\frac{1}{2}(1+\tan(t/2)^2)dt\\ \quad=\frac{1}{2}(1+u^2)dt\end{array}\right)$

$\displaystyle = \int_0^{+\infty} \frac{2\,du}{3+u^2} = \frac{2}{3}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2}du$

$\displaystyle \underset{x=\frac{u}{\sqrt{3}}}{=} \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\times\lim_{x\to+\infty}\arctan(x)$

$dx=\frac{1}{\sqrt{3}}du$

$= \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$.

Kholle C :

1) Soit $x \geq 0$, $\displaystyle\int_0^x \frac{e^t}{1+(e^t)^2}\,dt \underset{\substack{u=e^t \\ du=e^t dt}}{=} \int_1^{e^x} \frac{1}{1+u^2}\,du = \arctan(e^x) - \arctan(1) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

$1-\cos(t) \underset{0}{\sim} \frac{t^2}{2}$ donc $\frac{1-\cos(t)}{t^3} \sim \frac{1}{2t}$ et comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\cos(t)}{t^3}\,dt$ diverge

alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2t}\,dt$ diverge

On remarque que $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ cv car $\frac{e^{-t}}{t} = o_{+\infty}(e^{-t/2})$ car $\frac{e^{-t}}{te^{-t/2}} = \frac{e^{-t/2}}{t} \xrightarrow[+\infty]{} 0$ par C.C.

Or $\left|\sin(t)\frac{e^{-t}}{t}\right| \leq \frac{e^{-t}}{t}$ $\forall t \geq 3$.

Donc par CIFP, $\displaystyle\int_3^{+\infty} \sin(t)\frac{e^{-t}}{t}\,dt$ cv absolument donc cv.

2) $\frac{1}{(t+1)(t+2)} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t+2}$ $\forall t \notin \{-1;-2\}$ ssi $1 = a(t+2)+b(t+1) = t(a+b)+2a+b$ $\forall t \notin \{-1;-2\}$

On cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tq $\begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b=1 \end{cases}$ càd $\begin{cases} b=-1 \\ a=1 \end{cases}$

Ainsi, $\forall x \geq 1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{(t+1)(t+2)}\,dt = \int_1^x \frac{1}{t+1}\,dt - \int_1^x \frac{1}{t+2}\,dt$

$= \ln(x+1) - \ln(2) - \ln(x+2) + \ln(3)$

$= \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ln(3/2)$

Ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(t+1)(t+2)}\,dt$ cv et vaut $\ln(3/2)$.

Soit $x \geq 0$, $\displaystyle\int_0^x e^{-\sqrt{t}}\,dt \underset{\substack{u=\sqrt{t} \\ du=\frac{1}{2\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2u}dt}}{=} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-u}\,2u\,du = 2\left([-ue^{-u}]_0^{\sqrt{x}} + \int_0^{\sqrt{x}} e^{-u}\,du\right) = -2\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}} - 2e^{-\sqrt{x}} + 2 \xrightarrow[x \to +\infty]{} 2$ par C.C.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,dt$ cv et vaut 2

3) Soit $x \geq 0$, $\cancel{\int_0^x \sin(e^t)dt = [t\sin(e^t)]_0^x - \int_0^x t\, e^t\cos(e^t)dt}$

$\cancel{u = \sin(e^t) \quad v = t}$

$\cancel{u' = e^t\cos(e^t) \quad v' = 1}$

$$\int_0^x \sin(e^t)dt \underset{\substack{u=e^t \\ du = u\,dt}}{=} \int_1^{e^x} \frac{\sin(u)}{u}du = \left[-\frac{\cos(u)}{u}\right]_1^{e^x} + \int_1^{e^x} \frac{\sin(u)}{u^2}du = \frac{-\cos(e^x)}{e^x} + \cos(1) + \int_1^{e^x}\frac{\sin(u)}{u^2}du$$

$v = \frac{1}{u} \quad w = -\cos(u)$

$v' = \frac{-1}{u^2} \quad w' = \sin(u)$

$$\xrightarrow[x \to +\infty]{} \underbrace{\cos(1) + \int_1^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u^2}du}_{\text{existe}}.$$

4)

2) $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n} \in C^0(\mathbb{R})$ donc on regarde les impropreté en $+\infty$ et $-\infty$

Or, $\frac{1}{(t^2+1)^n} \sim \frac{1}{t^{2n}}$ et $2n > 1$ car $n > 1$

donc par C.I.F.P $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}dt$ cv (c'est très bref ici)

4)

b) $\int_0^A \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan(A) - \arctan(0) \xrightarrow[A \to +\infty]{} \pi/2$

et par parité $I_n = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}dt$. De plus, $\forall A > 0$

$$\int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^n}dt = \left[t \times \frac{1}{(1+t^2)^n}\right]_0^A - \int_0^A t\,\frac{-2nt}{(1+t^2)^{n+1}}dt$$

$\boxed{u' = 1 \quad u = t \quad v = \frac{1}{(1+t^2)^n} \quad v' = \frac{-2nt}{(1+t^2)^{n+1}}}$

$$= \frac{A}{(1+A^2)^n} + 2n\int_0^A \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}dt$$

$$= \frac{A}{(1+A^2)^n} + 2n\left(\int_0^A \frac{1+t^2}{(1+t^2)^{n+1}}dt - \int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}dt\right)$$

$$\xrightarrow[A \to +\infty]{} 2n(I_n - I_{n+1})$$

5) L'intégrale est impropre en 1

et $\dfrac{1}{(t^2-1)\sqrt{t+1}} = \dfrac{1}{(t-1)(t+1)\sqrt{t+1}} \underset{1}{\sim} \dfrac{1}{2\sqrt{2}(t-1)}$

donc comme $\int_0^1 \frac{1}{t-1}\,dt$ diverge alors $\int_0^1 \frac{1}{(t^2-1)\sqrt{t+1}}\,dt$ diverge.

6) f est trivialement dérivable sur $]0,1]$ par produit, composée de fonctions dérivables.

$\lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} x\cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$

car $\left|x\cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right| \leq |x| \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$, plus T.D.G.

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$ (*)

Soit $X \in]0,1]$, $\int_X^1 x\cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)dx = \int_1^{1/X^2} \dfrac{-1}{2u^2}\cos(u)\,du$ ← qui a une limite en 0^+ $(X\to 0^+)$

$u = \dfrac{1}{x^2}$

$du = -\dfrac{2}{x^3}dx$

$\dfrac{1}{-2u^2}du = x\,dx$

car $\left|\dfrac{-1}{2u^2}\cos(u)\right| \leq \dfrac{1}{2u^2}$

Mais $\int_X^1 \dfrac{2}{x}\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)dx = \int_1^{1/X^2} \dfrac{\sin(u)}{u}\,du$ ← qui diverge en 0^+ $(X\to 0^+)$

$u = \dfrac{1}{x^2}$

$du = \dfrac{-2}{x^3}dx$

$du = -2u\dfrac{dx}{x}$

car $\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}\,dx$ diverge

Ainsi $\int_X^1 f'(t)\,dt$ diverge quand $X\to 0^+$

(*) $\forall x>0$, $f'(x) = 2x\cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{2}{x}\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

Bonus :

en 0, $\frac{\ln(t)}{t^2+a^2} \underset{0}{\sim} \ln(t)$ et donc $\int_0^1 \ln(t)dt$ convergeant alors $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt$ converge.
(car $a>0$)

en $+\infty$, $\frac{\ln(t)}{t^2+a^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t^2} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ et comme $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{3/2}}dt$ cv alors $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt$ cv.

On a $I(a)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t)}{a^2+t^2}dt \underset{u=a/t}{=} \int_0^{+\infty}\frac{\ln(a)-\ln(u)}{a(u^2+1)}du = \frac{\ln(a)}{a}\int_0^{+\infty}\frac{du}{u^2+1} - \frac{1}{a}I(1)$

On montre $I(a)=\frac{\ln(a)}{a}\times\frac{\pi}{2}$ car $I(1)=0$ (preuve à faire)

Bonus :

Soit $q\in]l;1[$, il existe $A\in\mathbb{R}_+$ tel que

$\forall x\geq A \quad \frac{f(x+1)}{f(x)}\leq q$ et donc $\forall x\geq A, f(x+1)\leq q f(x)$.

$$\int_A^{A+n} f(t)dt = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}\int_A^{A+1} f(t+k)dt}_{\text{①}} \leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_A^{A+1} q^k f(t)dt = \int_A^{A+1} f(t)\sum_{k=0}^{n-1}q^k dt$$

① car $\int_{A+k}^{A+k+1} f(t)dt \underset{u=t-k}{=} \int_A^{A+1} f(u+k)du$

D'où $\int_A^{A+n} f(t)dt \leq \frac{1}{1-q}\int_A^{A+1} f(t)dt = M$

D'où, $\int_A^{+\infty} f(t)dt$ converge car $\int_A^{x} f(t)dt$ majorée et f positive !