Correction kholles 11/01/2022 :

Kholle C : 2)

- $f(P,Q)$ est réel.
- $f(P,Q)=P(-1)Q(-1)+P(0)+Q(0)+P(1)Q(1)=Q(-1)P(-1)+Q(0)P(0)+Q(1)P(1)$
$=f(Q,P)$.
- $f(\lambda P+R,Q)=(\lambda P+R)(-1)Q(-1)+(\lambda P+R)(0)Q(0)+(\lambda P+R)(1)Q(1)$
$=(\lambda P(-1)+R(-1))Q(-1)+(\lambda P(0)+R(0))Q(0)+(\lambda P(1)+R(1))Q(1)$.

On en déduit : $f(\lambda P+R,Q)=\lambda(P(-1)Q(-1)+P(0)Q(0)+P(1)Q(1))$
$+(R(-1)Q(-1)+R(0)Q(0)+R(1)Q(1))$.

Finalement, on a : $f(\lambda P+R,Q)=\lambda f(P,Q)+f(R,Q)$.

- $f(P,P)=(P(-1))^2+(P(0))^2+(P(1))^2\geq 0$ en tant que somme de carrés.
- Si $f(P,P)=0$ alors $(P(-1))^2+(P(0))^2+(P(1))^2=0$. Une somme de réels positifs est nulle si, et seulement si, tous les termes de la somme sont nuls. On obtient : $P(-1)=P(0)=P(1)=0$. Le polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$, qui possède au moins trois racines distinctes, est donc nécessairement le polynôme nul. Ainsi, on a montré que : $f(P,P)=0 \Rightarrow P=0$.

En conclusion, l'application f définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

2. a) Expliquons, par exemple, le calcul de $a_{1,2}=\langle X,X^2\rangle$. On pose $P=X$ et $Q=X^2$.

On a : $P(-1)=-1$, $Q(-1)=1$, $P(0)=0$, $Q(0)=0$, $P(1)=1$, $Q(1)=1$.

Ainsi : $a_{1,2}=\langle X,X^2\rangle=-1\times 1+0\times 0+1\times 1=0$. En procédant ainsi, on trouve :

$a_{0,0}=\langle 1,1\rangle=3$, $a_{1,1}=\langle X,X\rangle=2$, $a_{2,2}=\langle X^2,X^2\rangle=2$.

$a_{0,1}=a_{1,0}=\langle 1,X\rangle=0$, $a_{0,2}=a_{2,0}=\langle 1,X^2\rangle=2$, $a_{1,2}=a_{2,1}=\langle X,X^2\rangle=0$.

b) Compte tenu des résultats précédents, on a :

- $\langle 1,X\rangle=a_{0,1}=0$
- $\left\langle 1,X^2-\frac{2}{3}\right\rangle=\langle 1,X^2\rangle-\frac{2}{3}\langle 1,1\rangle=a_{0,2}-\frac{2}{3}a_{0,0}=2-\frac{2}{3}\times 3=0$.
- $\left\langle X,X^2-\frac{2}{3}\right\rangle=\langle X,X^2\rangle-\frac{2}{3}\langle X,1\rangle=a_{1,2}-\frac{2}{3}a_{1,0}=0$.

Ainsi, la famille $\left(1,X,X^2-\frac{2}{3}\right)$ est orthogonale.

3. Les sous-espaces F et G sont orthogonaux si : $\langle 1+X,X-X^2\rangle=0$ et $\langle 1-X^2,X-X^2\rangle=0$.

- $\langle 1+X,X-X^2\rangle=a_{0,1}-a_{0,2}+a_{1,1}-a_{1,2}=0-2+2-0=0$.
- $\langle 1-X^2,X-X^2\rangle=a_{0,1}-a_{0,2}-a_{2,1}+a_{2,2}=0-2-0+2=0$.

Ainsi, les sous-espaces vectoriels F et G sont donc orthogonaux.

Kholle A 2)

1. Le réel λ est valeur propre de A si, et seulement si, $A-\lambda I$ n'est pas inversible.

On a : $A-\lambda I=\begin{pmatrix}3-\lambda & 2 & 4\\ 2 & -\lambda & 2\\ 4 & 2 & 3-\lambda\end{pmatrix}$. Cherchons une réduite de Gauss de $A-\lambda I$.

On échange les lignes 1 et 3 pour obtenir : $\begin{pmatrix}4 & 2 & 3-\lambda\\ 2 & -\lambda & 2\\ 3-\lambda & 2 & 4\end{pmatrix}$.

Les opérations $L_2 \leftarrow 2L_2-L_1$ et $L_3 \leftarrow 4L_3-(3-\lambda)L_1$ donnent : $\begin{pmatrix}4 & 2 & 3-\lambda\\ 0 & -2-2\lambda & 1+\lambda\\ 0 & 2+2\lambda & (1+\lambda)(7-\lambda)\end{pmatrix}$.

Enfin, avec $L_3 \leftarrow L_3+L_2$, on obtient : $\begin{pmatrix}4 & 2 & 3-\lambda\\ 0 & -2-2\lambda & 1+\lambda\\ 0 & 0 & (1+\lambda)(8-\lambda)\end{pmatrix}$.

Ainsi, on trouve : $\lambda\in \mathrm{Sp}(A) \Leftrightarrow -2-2\lambda=0$ ou $(1+\lambda)(8-\lambda)=0 \Leftrightarrow \lambda=-1$ ou $\lambda=8$.

On en déduit : $\mathrm{Sp}(A)=\{-1,8\}$.

Pour la recherche des sous-espaces propres, on note $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ et on utilise la réduite de Gauss de A obtenue ci-dessus.

- Pour la valeur propre $\lambda=-1$: $(A+I)X=0 \Leftrightarrow 4x+2y+4z=0 \Leftrightarrow y=-2x-2z$.

$(A+I)X=0 \Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}x\\ -2x-2z\\ z\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$

Le sous-espace propre de A associé à la valeur propre -1 est : $E_{-1}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ -2\\ 1\end{pmatrix}\right)$.

- Pour la valeur propre $\lambda=8$: $(A-8I)X=0 \Leftrightarrow \begin{cases}4x+2y-5z=0\\ -18y+9z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2y\\ z=2y\end{cases}$.

Le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 8 est :

$E_8=\left\{\begin{pmatrix}2y\\ y\\ 2y\end{pmatrix}, y\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 2\end{pmatrix}\right)$. On note : $e_3=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$.

2. Déterminons une famille orthonormale de chaque sous-espace propre.

- Pour E_{-1}, on note $e_1=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 0\end{pmatrix}$ et on détermine un vecteur $e_2=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ non nul de E_{-1} tel que : $\langle e_2,e_1\rangle=0$.

On a : $\begin{cases}e_2\in E_{-1}\\ \langle e_2,e_1\rangle=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4a+2b+4c=0\\ a-2b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=-\dfrac{5}{2}b\\ a=2b\end{cases}$. Le vecteur $e_2=\begin{pmatrix}4\\ 2\\ -5\end{pmatrix}$ convient.

La famille (e_1,e_2) ainsi construite est une base orthogonale de E_{-1}. Comme $\| e_1 \| = \sqrt{5}$ et $\| e_2 \| = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$, la famille $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}e_1, \frac{1}{3\sqrt{5}}e_2\right)$ est une base orthonormale de E_{-1}.

- Pour E_8, comme $\| e_3 \| = 3$, la famille $\left(\frac{1}{3}e_3\right)$ est une base orthonormale de E_8.
- Ainsi, la famille $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}e_1, \frac{1}{3\sqrt{5}}e_2, \frac{1}{3}e_3\right)$ est une base orthonormale de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, formée de vecteurs propres de A, dont les valeurs propres associées sont respectivement : -1, -1 et 8.

Finalement, on obtient $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 0 & -5/3\sqrt{5} & 2/3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

La matrice P, ainsi construite, est orthogonale et on a la relation : $A = PD\,{}^tP$.

KhollesC 1)

1. Soit $x=(x_1,x_2,x_3)$, $y=(y_1,y_2,y_3)$ et $z=(z_1,z_2,z_3)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, et λ un réel.

- On constate d'abord que $f(x,y)$ est réel.
- $f(x,y)=(x_1-2x_2)(y_1-2y_2)+x_2y_2+(x_2+x_3)(y_2+y_3)$
  $=(y_1-2y_2)(x_1-2x_2)+y_2x_2+(y_2+y_3)(x_2+x_3)=f(y,x)$.
- $f(\lambda x+y,z)=(\lambda x_1+y_1-2(\lambda x_2+y_2))(z_1-2z_2)+(\lambda x_2+y_2)z_2+(\lambda x_2+y_2+\lambda x_3+y_3)(z_2+z_3)$
  $=\lambda\left[(x_1-2x_2)(z_1-2z_2)+x_2z_2+(x_2+x_3)(z_2+z_3)\right]$
  $+\left[(y_1-2y_2)(z_1-2z_2)+y_2z_2+(y_2+y_3)(z_2+z_3)\right]$.

Finalement, on obtient : $f(\lambda x+y,z)=\lambda f(x,z)+f(y,z)$.

- $f(x,x)=(x_1-2x_2)^2+x_2^2+(x_2+x_3)^2\geq 0$ en tant que somme de carrés.
- Si $f(x,x)=0$, on obtient : $(x_1-2x_2)^2+x_2^2+(x_2+x_3)^2=0$. Une somme de réels positifs est nulle si, et seulement si, tous les termes de la somme sont nuls. On en déduit : $x_1-2x_2=x_2=x_2+x_3=0$ soit $x_2=x_3=x_1=0$. Ainsi, on a montré que : $f(x,x)=0 \Rightarrow x=0$.

En conclusion, l'application *f* définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

2. a) On a : $\langle e_1,e_2\rangle=(1-2)(-3-2(-2))+1(-2)+(1+2)(-2+3)=0$. Ainsi, la famille (e_1,e_2) est orthogonale.

b) Soit $x=(x_1,x_2,x_3)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. On a : $\|x\|^2=\langle x,x\rangle=(x_1-2x_2)^2+x_2^2+(x_2+x_3)^2$.

- $\|e_1\|^2=\langle e_1,e_1\rangle=(1-2)^2+1^2+(1+1)^2=6$, donc : $\|e_1\|=\sqrt{6}$. On pose : $u_1=\frac{1}{\sqrt{6}}e_1$.
- $\|e_2\|^2=\langle e_2,e_2\rangle=(-3+4)^2+(-2)^2+(-2+3)^2=6$, donc : $\|e_2\|=\sqrt{6}$. On pose : $u_2=\frac{1}{\sqrt{6}}e_2$.

La famille (u_1,u_2), ainsi construite, est bien une famille orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

Kholle 2 B)

Première partie.

1. Si f est un endomorphisme orthogonal de E, on sait que, pour tout couple (x,y) de vecteurs de E, on a : $\langle f(x),f(y)\rangle=\langle x,y\rangle$. En particulier : $\langle f(x),f(x)\rangle=\langle x,x\rangle$.

Si on considère un vecteur x appartenant à Ker f, on a : $f(x)=0$. On en déduit : $\langle x,x\rangle=0$.

$\langle f(x),f(y)\rangle=\frac{1}{2}\left(\|f(x+y)\|^2-\|f(x)\|^2-\|f(y)\|^2\right)$ car f est linéaire.

$\langle f(x),f(y)\rangle=\frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2\right)$ d'après l'hypothèse.

$\langle f(x),f(y)\rangle=\langle x,y\rangle$. Ainsi, l'endomorphisme f est orthogonal.

On a montré que l'endomorphisme f est orthogonal si, et seulement si, pour tout vecteur x de E, on a : $\|f(x)\|=\|x\|$.

2. Soit f un endomorphisme orthogonal de E. On note $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormale de E. On considère la famille $\mathcal{B}'=(f(e_1),\dots,f(e_n))$. Comme f est orthogonal, pour tout couple (x,y) de vecteurs de E, on a : $\langle f(x),f(y)\rangle=\langle x,y\rangle$. En particulier, pour tout couple (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$: $\langle f(e_i),f(e_j)\rangle=\langle e_i,e_j\rangle$. Comme la base $\mathcal{B}$ est orthonormale, on en déduit :

$\langle f(e_i),f(e_j)\rangle=\begin{cases}1 \text{ si } i=j\\ 0 \text{ si } i\neq j\end{cases}$. Ainsi, la famille $\mathcal{B}'$ est une famille orthonormale de E. Comme elle est formée de n vecteurs de E, qui est de dimension n, on peut conclure que $\mathcal{B}'$ est une base orthonormale de E.

Réciproquement, on considère une base orthonormale $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ de E et f, un endomorphisme tel que la famille $\mathcal{B}'=(f(e_1),\dots,f(e_n))$ soit une base orthonormale de E.

Soit x un vecteur de E. On note x_1, ..., x_n les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$. On a :

$x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$ et $f(x)=\sum_{i=1}^{n}x_if(e_i)$.

$\|x\|^2=\langle x,x\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^{n}x_ie_i,\sum_{j=1}^{n}x_je_j\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_ix_j\langle e_i,e_j\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ car la base $\mathcal{B}$ est orthonormale.

De la même manière, on a : $\|f(x)\|^2=\langle f(x),f(x)\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^{n}x_if(e_i),\sum_{j=1}^{n}x_jf(e_j)\right\rangle$. Par bilinéarité, on obtient : $\|f(x)\|^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_ix_j\langle f(e_i),f(e_j)\rangle=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_ix_j\langle e_i,e_j\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ (l'avant-dernière égalité provenant du fait que f est orthogonal).

Ainsi, pour tout vecteur x de E, on a : $\|f(x)\|=\|x\|$. Grâce à la première question de cette partie, on en déduit que f est orthogonal.

On a montré que f est orthogonal si, et seulement si, f transforme toute base orthonormale de E en une base orthonormale de E.

3. • Soit f un endomorphisme orthogonal de E. On note $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormale de E et M la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Par définition de la matrice d'un endomorphisme dans

une base, les colonnes de M sont les coordonnées de $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ donc M est la matrice de passage de la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ à la famille $\mathcal{B}' = \left(f(e_1), \dots, f(e_n)\right)$. Comme f est orthogonal et comme $\mathcal{B}$ est orthonormale, la famille $\mathcal{B}'$ est, d'après la question précédente, une base orthonormale de E.
Ainsi, M est la matrice de passage entre deux bases orthonormales. La matrice M est donc orthogonale.

- Réciproquement, on considère une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E et f, un endomorphisme tel que la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$ soit orthogonale. La matrice M vérifie donc l'égalité : ${}^tMM = I$.

Soit x un vecteur de E. On note $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$ et $(y_1, \dots, y_n)$ les coordonnées du vecteur $f(x)$ dans la base $\mathcal{B}$. Soit X et Y les matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définies par : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. On sait que : $Y = MX$. Comme la base $\mathcal{B}$ est orthonormale, on a :
$\| f(x) \|^2 = {}^tYY = {}^t(MX)MX = {}^tX\,{}^tMMX = {}^tXX = \| x \|^2$. Ainsi, pour tout vecteur x de E, on a : $\| f(x) \| = \| x \|$. Grâce à la première question de cette partie, on en déduit que f est orthogonal.
On a montré que f est orthogonal si, et seulement si, la matrice de f dans une base orthonormale de E est orthogonale.

Kholle 2 A)

1. a) Soit x et y deux vecteurs de E. On note $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ les coordonnées respectives de x et y dans la base $\mathcal{B}$. Soit X et Y les matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définies par :
$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Les coordonnées des vecteurs $u(x)$ et $u^*(x)$, dans la base $\mathcal{B}$, sont données respectivement par les produits matriciels MX et ${}^tMY$.
Comme la base $\mathcal{B}$ est orthonormale, on a :
$\langle u(x), y \rangle = = {}^t(MX)Y = {}^tX\,{}^tMY = {}^tX({}^tMY) = \langle x, u^*(y) \rangle$.

b) Soit v un endomorphisme de E et y un vecteur quelconque de E. Pour tout vecteur x de E, on a : $\langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$. Par définition de u^*, on en déduit : $\langle x, v(y) \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$.
On a donc, pour tout vecteur x de E : $\langle x, (v - u^*)(y) \rangle = 0$. On en déduit que $(v - u^*)(y)$ appartient à $E^\perp$, ce qui signifie que : $(v - u^*)(y) = 0$. Ceci étant vrai pour tout vecteur y de E, on a : $v = u^*$. On a bien montré que u^* est le seul endomorphisme de E qui vérifie :

$$\forall (x, y) \in E^2, \ \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$$

2. Si $u=u^*$, on a : $\forall(x,y)\in E^2$, $\langle u(x),y\rangle=\langle x,u(y)\rangle$.
Ainsi, u est un endomorphisme symétrique de E.
Réciproquement, si u est un endomorphisme symétrique, on a :
$\forall(x,y)\in E^2$, $\langle u(x),y\rangle=\langle x,u(y)\rangle$.
D'après la question **1.b)**, u^* est le seul endomorphisme tel que $\langle u(x),y\rangle=\langle x,u^*(y)\rangle$, on en déduit que : $u^*=u$.

3. Soit y un vecteur de $F^{\perp}$. Par définition de u^*, pour tout vecteur x de F, on a : $\langle u(x),y\rangle=\langle x,u^*(y)\rangle$. Comme x appartient à F qui est stable par u, alors $u(x)$ appartient à F.
On en déduit : $\langle u(x),y\rangle=0$ puisque y appartient à $F^{\perp}$.
Finalement, pour tout vecteur x de F, on a : $\langle x,u^*(y)\rangle=0$. Ainsi, $u^*(y)$ appartient à $F^{\perp}$.
On en déduit que $F^{\perp}$ est stable par u^*.

Kholle A 1)

1. a) Si a est une racine d'ordre au moins $n+1$ de P, alors il existe un polynôme Q tel que : $P=(X-a)^{n+1}Q$. Si Q n'est pas le polynôme nul, alors on a : $\deg P=n+1+\deg Q\geq n+1$. C'est absurde car P est élément de E. On en conclut que Q est nécessairement le polynôme nul.
Finalement, P est le polynôme nul.

b) Soit P_1, P_2 et Q trois éléments de E et λ un réel.

- On constate que $\varphi(P,Q)$ est réel.
- $\varphi(P,Q)=\sum_{i=0}^{n}P^{(i)}(a)Q^{(i)}(a)=\sum_{i=0}^{n}Q^{(i)}(a)P^{(i)}(a)$. Ainsi, on a : $\varphi(P,Q)=\varphi(Q,P)$.
- $\varphi(\lambda P_1+P_2,Q)=\sum_{i=0}^{n}(\lambda P_1+P_2)^{(i)}(a)Q^{(i)}(a)=\sum_{i=0}^{n}\left(\lambda P_1^{(i)}a+P_2^{(i)}(a)\right)Q^{(i)}(a)$, grâce à la linéarité de la dérivation.

On en déduit : $\varphi(\lambda P_1+P_2,Q)=\lambda\sum_{i=0}^{n}P_1^{(i)}(a)Q^{(i)}(a)+\sum_{i=0}^{n}P_2^{(i)}(a)Q^{(i)}(a)$

Finalement, on a : $\varphi(\lambda P_1+P_2,Q)=\lambda\varphi(P_1,Q)+\varphi(P_2,Q)$.

- $\varphi(P,P)=\sum_{i=0}^{n}\left(P^{(i)}(a)\right)^2 \geq 0$, en tant que somme de carrés.
- Si $\varphi(P,P)=0$, alors $\sum_{i=0}^{n}\left(P^{(i)}(a)\right)^2=0$.

Une somme de réels positifs est nulle si et seulement si tous les termes de la somme sont nuls. On obtient : $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $P^{(i)}(a)=0$. On en déduit que a est racine multiple de P avec un ordre au moins égal à $n+1$ donc d'après la question **1.a)**, P est nul. Ainsi : $\varphi(P,P)=0 \Rightarrow P=0$.
On en conclut que φ est un produit scalaire sur E.

2. a) Pour tout couple (i,j) de $[\![0,n]\!]^2$, on a : $\langle P_i,P_j\rangle=\sum_{k=0}^{n}P_i^{(k)}(a)P_j^{(k)}(a)$.

On sait que : $\forall k \in [\![0,i]\!]$, $P_i^{(k)}=\frac{i!}{(i-k)!}(X-a)^{i-k}$ et $\forall k>i$, $P_i^{(k)}=0$.

On en déduit que pour tout k de $[\![0,n]\!]$: $P_i^{(k)}(a)=\begin{cases}0 \text{ si } k\neq i\\ i! \text{ si } k=i\end{cases}$

De même, pour tout k de $[\![0,n]\!]$, on a : $P_j^{(k)}(a)=\begin{cases}0 \text{ si } k\neq j\\ j! \text{ si } k=j\end{cases}$.

Par conséquent, pour tout i différent de j, on a : $P_i^{(k)}(a)P_j^{(k)}(a)=0$

Finalement, pour tout couple (i,j) de $[\![0,n]\!]^2$ tel que $i\neq j$, on a : $\langle P_i,P_j\rangle=\sum_{k=0}^{n}0=0$.

La famille $(P_0,\dots,P_n)$ est constituée de n+1 polynômes non nuls de E, qui est de dimension n+1. Ainsi, grâce au **théorème 5.1**, la famille $(P_0,\dots,P_n)$ est une base orthogonale de E.

⇨ *Méthode 5.1*

b) Pour tout entier naturel i, on a : $\|P_i\|^2=\sum_{k=0}^{n}\left(P_i^{(k)}(a)\right)^2$.

D'après la question **2.a)**, seul le terme d'indice $k=i$ n'est pas nul dans cette somme, et ce terme vaut $(i!)^2$. Pour tout i de $[\![0,n]\!]$, on a donc $\|P_i\|^2=(i!)^2$, d'où : $\|P_i\|=i!$.
On pose alors : $Q_i=\frac{1}{i!}(X-a)^i$ et on a $\|Q_i\|=1$. Comme la famille $(P_0,\dots,P_n)$ est une base orthogonale de E, la famille $\mathcal{B}=(Q_0,\dots,Q_n)$, ainsi construite, est une base orthonormale de E.

3. Pour tout i de $[\![0,n]\!]$, la $i^{\text{ème}}$ coordonnée d'un élément P de E dans la base orthonormale $\mathcal{B}$ est $\langle P,Q_i\rangle$. Or $Q_i^{(k)}(a)=\frac{1}{i!}P_i^{(k)}(a)=\begin{cases}0 \text{ si } k\neq i\\ 1 \text{ si } k=i\end{cases}$ donc : $\langle P,Q_i\rangle=\sum_{k=0}^{n}P^{(k)}(a)Q_i^{(k)}(a)=P^{(i)}(a)$.

Ainsi, pour tout i de $[\![0,n]\!]$, la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de P dans la base $\mathcal{B}$ est $P^{(i)}(a)$.
On a donc : $P=\sum_{i=0}^{n}P^{(i)}(a)Q_i$ et, grâce à la question **2.b)**, on obtient : $P=\sum_{i=0}^{n}\frac{P^{(i)}(a)}{i!}(X-a)^i$.
On retrouve ainsi la formule de Taylor pour les polynômes.

Bonus :

Soit $x=(x_1,\dots,x_n)$ et $y=(y_1,\dots,y_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz, dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, s'énonce ainsi :

$\langle x,y\rangle^2 \leq \|x\|^2\,\|y\|^2$, c'est-à-dire $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k{}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k{}^2\right)$.

Pour tout k de $[\![1,n]\!]$, posons : $x_k = k$ et $y_k=\sqrt{k}$. Ainsi : $\left(\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k}\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)$.

On en déduit : $\left(\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k}\right)^2 \leq \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\times\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Comme $\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k}$ est positive (en tant que somme de termes positifs), on en conclut, grâce à la croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$: $\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leq \sqrt{\dfrac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{12}}$.

Finalement, puisque $n(n+1)$ est positif, on a : $\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leq \dfrac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$.

Soit $x_1, \dots, x_n$ des réels strictement positifs. On pose : $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $y_k=\sqrt{x_k}$ et $z_k=\dfrac{1}{\sqrt{x_k}}$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz, appliquée aux vecteurs $y=(y_1,\dots,y_n)$ et $z=(z_1,\dots,z_n)$ de $\mathbb{R}^n$, s'écrit : $\left(\sum_{k=1}^{n} y_k z_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} y_k{}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} z_k{}^2\right)$.

On obtient alors : $\left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k}\right)$. On en conclut : $n^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k}\right)$.

D'après le **théorème 4.3**, il y a égalité si, et seulement si, la famille (y,z) est liée, c'est-à-dire, comme z n'est pas nul, si, et seulement si, il existe un réel α tel que $y=\alpha z$.

On a : $y=\alpha z \Leftrightarrow \forall k\in[\![1,n]\!],\ y_k=\alpha z_k \Leftrightarrow \forall k\in[\![1,n]\!],\ \sqrt{x_k}=\alpha\dfrac{1}{\sqrt{x_k}} \Leftrightarrow \forall k\in[\![1,n]\!],\ x_k=\alpha$.

Pour conclure, on a : $n^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k}\right)$, avec égalité si, et seulement si, $x_1=\dots=x_n$.

[redacted]

1. Notons p le projecteur orthogonal sur $\mathbb{R}_2[X]$. On sait que $p(X^3)$ est défini par les deux conditions : $p(X^3) \in \mathbb{R}_2[X]$ et $X^3 - p(X^3) \in \mathbb{R}_2[X]^\perp$. On en déduit :

- $p(X^3) \in \mathbb{R}_2[X] \Leftrightarrow \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, p(X^3) = aX^2 + bX + c$.

$X^3 - p(X^3) = X^3 - aX^2 - bX - c$.

- $$X^3 - p(X^3) \in \mathbb{R}_2[X]^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} \langle X^3 - p(X^3), 1 \rangle = 0 \\ \langle X^3 - p(X^3), X \rangle = 0 \\ \langle X^3 - p(X^3), X^2 \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_0^{+\infty} (t^3 - at^2 - bt - c) e^{-t} dt = 0 \\ \int_0^{+\infty} (t^4 - at^3 - bt^2 - ct) e^{-t} dt = 0 \\ \int_0^{+\infty} (t^5 - at^4 - bt^3 - ct^2) e^{-t} dt = 0 \end{cases}$$

On rappelle que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$.

On en déduit : $$X^3 - p(X^3) \in \mathbb{R}_2[X]^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 2a - b - c = 0 \\ 24 - 6a - 2b - c = 0 \\ 120 - 24a - 6b - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = -18 \\ c = 6 \end{cases} \text{ (après calculs).}$$

On en conclut : $p(X^3) = 9X^2 - 18X + 6$.

2. a) On a : $f(a,b,c) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \left(t^3 - (at^2 + bt + c)\right)^2 dt$.

On obtient ainsi : $f(a,b,c) = \| X^3 - (aX^2 + bX + c) \|^2 = \| X^3 - P \|^2$.

b) [redacted] l'ensemble $\{\| X^3 - P \|, P \in \mathbb{R}_2[X]\}$ admet un minimum atteint en un unique polynôme P_0 de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par : $P_0 = p(X^3)$.

D'après la question **1**, on a : $P_0 = 9X^2 - 18X + 6$.

D'après la question **2.a)**, on a : $\min\limits_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} f(a,b,c) = \min\limits_{P \in \mathbb{R}_2[X]} \| X^3 - P \|^2 = \| X^3 - P_0 \|^2$.

Or, on peut vérifier, [redacted] que : $\| X^3 - p(X^3) \|^2 = \| X^3 \|^2 - \langle X^3, p(X^3) \rangle$.

On a : • $\| X^3 \|^2 = \int_0^{+\infty} t^6 e^{-t} dt = 720$.

• $\langle X^3, p(X^3) \rangle = \int_0^{+\infty} t^3 (9t^2 - 18t + 6) e^{-t} dt = 9 \times 5! - 18 \times 4! + 6 \times 3! = 684$.

On obtient donc : $\| X^3 - P_0 \|^2 = 36$.

On déduit de la question **1** que f possède un minimum atteint en un unique triplet $(9, -18, 6)$ et que ce minimum vaut 36.