Correction kholles 05/10/2021 :

Kholle A :

1) a) $A-\lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1-\lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_1 - (1-\lambda) L_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1+\lambda & 1-(1-\lambda)^2 \end{pmatrix} \underset{L_3 + L_2 \to L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}$$

Ainsi $A-\lambda I$ n'est pas inversible ssi $1-\lambda=0$ ou $\lambda=0$ ou $2-\lambda$
ssi $\lambda=1$ ou $\lambda=0$ ou $\lambda=2$

$Sp(A) = \{1, 0, 2\}$

De plus soit : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(A-I) \iff \begin{cases} z=0 \\ 0=0 \\ x+y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} z=0 \\ x=-y \end{cases}$

$Ker(A-I) = \{(-y, y, 0) \text{ tq } y \in \mathbb{R}\} = Vect(-1, 1, 0)$
↑ en colonne ↑ en colonne.

De plus, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(A) \iff \begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-z \\ y=0 \end{cases}$

Donc $Ker(A) = Vect\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De plus, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(A-2I) \iff \begin{cases} -x+z=0 \\ -y=0 \\ x-z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=z \\ y=0 \end{cases}$

$Ker(A-2I) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ainsi A est diagonalisable (direct car 3 vap différents)

b) On trouve $Sp(B) = \{1, 2\}$ et $E_1 = Vect\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

et $E_2 = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Donc B est diagonalisable et $B = PDP^{-1}$
avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) $t \longmapsto \ln(t^2+\sin(t))$ est continue sur $]0;1]$

car $\forall x>0$, $x^2+\sin(x)>0$ (prouver le).

Donc on regarde l'impropreté en 0 :

On remarque que $t^2+\sin(t) \underset{0}{\sim} t$ car $\frac{t^2+\sin(t)}{t} = t + \frac{\sin(t)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$

On montre que $\ln(t^2+\sin(t)) \sim \ln(t)$ car

$$\frac{\ln(t^2+\sin(t))}{\ln(t)} = \frac{\ln(t(t+\frac{\sin(t)}{t}))}{\ln(t)} = \frac{\ln(t)}{\ln(t)} + \frac{\ln(t+\frac{\sin(t)}{t})}{\ln(t)}$$

$$= 1 + \frac{\ln(t+\sin(t)/t)}{\ln(t)} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$$

Or $\forall t \in]0;1]$, $\ln(t)<0$ et

$\int_0^1 \ln(t)dt$ cv car $\int_A^1 \ln(t)dt = [t\ln(t)-t]_A^1$

$$= -1 - A\ln(A) + A \xrightarrow[A\to 0]{} 0 \text{ par C.C.}$$

Donc $\int_0^1 \ln(t^2+\sin(t))dt$ cv par C.I.F.N.

3) a) i) On trouve $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = O_3$

ii) Si A était inversible alors $A^3 = O_3 \Rightarrow A^2 = O_3 A^{-1} = O_3$ ↯

Donc A n'est pas inversible.

De plus, si A admettait une valeur propre λ non nulle alors $\exists X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$

tq $AX = \lambda X$ d'où $A(A(AX)) = A^3X = A(A(\lambda X))$
$= A(\lambda^2 X) = \lambda^3 X$

Mais $A^3X = O_3X = 0$ D'où $\lambda^3 = 0$ ou $\underset{\text{impossible}}{X=0}$ donc $\lambda = 0$

iii) Cherchons $V_0 = E_0 = \mathrm{Ker}(A)$:

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A)$ ssi $\begin{cases} x+y-2z=0 \\ -x-y+2z=0 \\ 2x-2y=0 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x+y-2z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} z=0 \\ x=-y \end{cases}$

Ainsi $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$ donc A n'est pas diagonalisable.

b) i) On trouve facilement $M(a)M(b) = M(a+b) \in E$

ii) $M(0) = 1 = M(a)M(-a)$ donc $M(a) \in Gl_3(\mathbb{R})$ et $M(a)^{-1} = M(-a)$.

c) i) Soit X un v.p. de A associé à la vap λ ;

Ainsi $AX = \lambda X$ donc
$$\begin{aligned} M(a)X &= X + 2a\lambda X + 2a^2\lambda^2 X \\ &= (1+2a\lambda+2a^2\lambda^2)X \end{aligned}$$

Donc X vp de $M(a)$ associé à la vap $1+2a\lambda+2a^2\lambda^2$

ii) $(M(a)-I)^3 = (2aA+2a^2A^2)^3 = 8a^3A^3 + 24a^4A^4 + 24a^5A^5 + 8a^6A^6 = 0$

$(= A^3(2aI+2a^2A) = 0)$

iii) Ainsi $M(a)$ est annulée par le polynôme $(X-1)^3$ donc $Sp(M(a)) \subset \{1\}$

Si $M(a)$ était diagonalisable alors $\exists P \in Gl_3(\mathbb{R})$ tq
$M(a) = PIP^{-1} = I$

Ce qui est absurde car alors $\begin{pmatrix} 1+4a & 1+4a & -2 \\ -1+4a & -1-4a & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 0$ comme $a \neq 0$.

Donc $M(a)$ n'est pas diagonalisable.

On a $f'(x)=f'(0)+\int_0^x f''(t)dt$

donc $f'(x)$ a une limite finie l quand $x\to+\infty$.

et si $l>0$ alors, pour x assez grand, $f'(x)\geq l/2$ donc $f(x)\geq \frac{lx}{2}+m$

ce qui empêche la cv de $\int_0^{+\infty} f(t)dt$.

De m. si $l<0$

D'où $l=0$.

f' est continue et converge en $+\infty$ donc est bornée d'où

$\forall t\geq 0 \qquad |f(t)f'(t)|\leq M|f(t)| \leftarrow$ cv (il faut le supposer)

d'où $\int_0^{+\infty}|f(t)f'(t)|dt$ cv aussi

donc $\int_0^{+\infty} f(t)f'(t)dt$ cv.

Kholle B :

1) $A-\lambda I=\begin{pmatrix}2-\lambda & 4\\ 1 & -1-\lambda\end{pmatrix}$ est inversible ssi $(2-\lambda)(-1-\lambda)-4\neq 0$

ssi $-6-\lambda+\lambda^2\neq 0$

Or $\lambda^2-\lambda-6=0 \iff \lambda=3$ ou $\lambda=-2$.

$Sp(A)=\{3;-2\}$ (2 vp distinctes donc A est diagonalisable)

On trouve $E_{-2}=Vect\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

$E_3=Vect\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

$B-\lambda I$ est inversible ssi $(1-\lambda)^2+1=0$

Donc pas de vp réelle : mais 2 vp complexes $1-i$ et $1+i$.

Donc B n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$

Dans $\mathbb{C}$: $E_{1-i}=Vect\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}$ et $E_{1+i}=Vect\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$.

(diagonalisable dans $\mathbb{C}$).

2) $\dfrac{1-\tan(t/2)^2}{1+\tan(t/2)^2} = \dfrac{1-\dfrac{\sin(t/2)^2}{\cos(t/2)^2}}{1+\dfrac{\sin(t/2)^2}{\cos(t/2)^2}} = \dfrac{\cos(t/2)^2-\sin(t/2)^2}{\cos(t/2)^2+\sin(t/2)^2} = \cos(t/2)^2-(1-\cos(t/2)^2) = 2\cos(t/2)^2-1$

Or $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$
$\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$

$\left(\begin{array}{l}\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)\\ \sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a)\end{array}\right)$

donc $\cos(a)\cos(b)=\dfrac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$

d'où $\cos(t/2)^2=\dfrac{\cos(t)+\cos(0)}{2}=\dfrac{\cos(t)+1}{2}$.

Ainsi $2\cos(t/2)^2-1=\cos(t)$.

$\displaystyle\int_0^\pi \frac{dt}{2+\cos(t)}$ existe car $t \longmapsto \dfrac{1}{2+\cos(t)} \in C^0([0;\pi])$

car $\cancel{\dfrac{1}{2+\cos(t)}}$ $2+\cos(t)>0$.

De plus $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dt}{2+\cos(t)} \underset{u=\tan(t/2)}{=} \int_0^{+\infty} \frac{1}{2+\frac{1-u^2}{1+u^2}} \times \frac{2\,du}{1+u^2}$

$\left(\begin{array}{l} du=\frac{1}{2}(1+\tan(t/2)^2)\,dt\\ \quad =\frac{1}{2}(1+u^2)\,dt\end{array}\right)$

$\displaystyle = \int_0^{+\infty} \frac{2\,du}{3+u^2} = \frac{2}{3}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2}\,du$

$x=\dfrac{u}{\sqrt{3}}$
$dx=\dfrac{1}{\sqrt{3}}du$

$\displaystyle = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \lim_{x\to+\infty} \arctan(x)$

$= \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$.

3) Il faut donc montrer que $g^2-2g+id=0$

c.à.d $\forall M\in M_n(\mathbb{R})$, $g^2(M)-2g(M)+M=0$

c.à.d $\forall M\in M_n(\mathbb{R})$, $g(M)+tr(g(M))J-2(M+tr(M)J)$

———————, $M+tr(M)J+\underbrace{tr(M+tr(M)J)}J-2M-2\,tr(M)J+M=0$

———————, $-tr(M)J+(tr(M)+tr(M)tr(J))J=0$

———————, $-tr(M)J+\underbrace{(tr(M))J=0}_{\text{Vraie}}$.

Mais $Sp(g)\subset\{1\}$ car $X^2-2X+1=0$ ssi $X=1$.

Or cela signifierait, si g était diagonalisable, $g=id$ (car $Mat_{\mathcal{B}}(g)=PIP^{-1}=I$)
$=Mat_{\mathcal{B}}(g)$

Donc $g(M)=M$ $\forall M\in M_n(\mathbb{R})$ donc $tr(M)J=0$ $\forall M\in\mathbb{R}$

donc $tr(M)=0$ $\forall M\in\mathbb{R}$

ce qui est absurde.

Ainsi g n'est pas diagonalisable.

4) λ vap de $f\xmapsto{\phi}f'$ et f vp :

Si $\phi(f)=\lambda f$ c.à.d $\lambda f=f'$

Or $f'(x)=\lambda f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$ $\iff$ $f(x)=Ke^{\lambda x}$ $\forall x\in\mathbb{R}$
($K\in\mathbb{R}$ quelconque)

D'où $Sp(\phi)=\mathbb{R}$ et $E_\lambda=\{Ke^{\lambda x}\ \text{tq}\ K\in\mathbb{R}\}$

$=Vect(x\mapsto e^{\lambda x})$.

Kholle C :

2) $t \longmapsto \frac{1}{(1+t^2)^n} \in C^0(\mathbb{R})$ donc on regarde les impropreté en $+\infty$ et $-\infty$

Donc $Sp(A) = \{1, j, j^2\}$ avec $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

b) Si A diagonalisable dans $\underbrace{\mathbb{R}}$ alors $A = PIP^{-1} = I$ c'est absurde car $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{1\}$

c) A a 3 vap distinctes dans $\mathbb{C}$ donc est diagonalisable.

$E_1(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $E_j(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix}j^2\\j\\1\end{pmatrix}$ et $E_{j^2}(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix}j\\j^2\\1\end{pmatrix}$

Donc $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix}1 & j & j^2\\1 & j^2 & j\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & j & 0\\0 & 0 & j^2\end{pmatrix}$.

2) $t \longmapsto \frac{1}{(1+t^2)^n} \in C^0(\mathbb{R})$ donc on regarde les impropreté en $+\infty$ et $-\infty$

Or, $\frac{1}{(t^2+1)^n} \sim \frac{1}{t^{2n}}$ et $2n > 1$ car $n > 1$

donc par C.I.F.P $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}dt$ cv (c'est très bref ici)

b) $\int_0^A \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan(A) - \arctan(0) \xrightarrow[A \to +\infty]{} \frac{\pi}{2}$

et par parité $I_n = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}dt$. De plus, $\forall A > 0$

$$\int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^n}dt = \left[t \times \frac{1}{(1+t^2)^n}\right]_0^A - \int_0^A t\,\frac{-2nt}{(1+t^2)^{n+1}}dt$$

$u' = 1$ $\quad u = t$

$v = \frac{1}{(1+t^2)^n}$ $\quad v' = \frac{-2nt}{(1+t^2)^{n+1}}$

$$= \frac{A}{(1+A^2)^n} + 2n\int_0^A \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}dt$$

$$= \frac{A}{(1+A^2)^n} + 2n\left(\int_0^A \frac{1+t^2}{(1+t^2)^{n+1}}dt - \int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}dt\right)$$

$$\xrightarrow[A \to +\infty]{} 2n(I_n - I_{n+1})$$

3) $x \overset{f}{\longmapsto} \dfrac{1}{x \ln(x)^a}$ est $C^0([e;+\infty[)$

On pose $u = \ln(x)$: $\displaystyle\int_e^A \frac{dx}{x \ln(x)^a} = \int_1^{\ln(A)} \frac{du}{u^a} du$
$x = e^u$
$du = \frac{1}{x} dx$

Donc $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln(x)^a}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^a}$ sont de m̂ nature.

Donc $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln(x)^a}$ converge ssi $a > 1$.

Soit $x \geq e$, $\displaystyle f'(x) = \frac{-\left(\ln(x)^a + a(\ln(x))^{a-1}\right)}{(x\ln(x)^a)^2}$

$\displaystyle = \frac{-\ln(x)^{a-1}(\ln(x) + a)}{(x\ln(x)^a)^2}$

Comme $a > 0$, $f'(x) < 0$

donc f est $\searrow$ sur $[e;+\infty[$.

donc $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$

$\forall n, \forall x \in [n;n+1[$

d'où $\displaystyle f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n) \quad \forall n \geq 3$

et $\displaystyle\sum_{n=3}^{N} f(n+1) \leq \int_3^{N+1} f(x)\,dx \leq \sum_{n=3}^{N} f(n)$

Donc $\displaystyle\int_3^{+\infty} f(x)\,dx$ cv ssi $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} f(n)$ cv

D'où $\displaystyle\sum \frac{1}{n\ln(n)^a}$ cv ssi $a > 1$

Bonus :

Soit $q \in]\ell;1[$, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que

$\forall x \geq A \quad \frac{f(x+1)}{f(x)} \leq q$ et donc $\forall x \geq A$, $f(x+1) \leq q f(x)$.

$$\int_A^{A+n} f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_A^{A+1} f(t+k)\,dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_A^{A+1} q^k f(t)\,dt = \int_A^{A+1} f(t) \sum_{k=0}^{n-1} q^k\,dt$$

car $\int_{A+k}^{A+k+1} f(t)\,dt = \int_A^{A+1} f(u+k)\,du$ ($u = t-k$)

$$\text{D'où} \quad \int_A^{A+n} f(t)\,dt \leq \frac{1}{1-q} \int_A^{A+1} f(t)\,dt = M$$

D'où, $\int_A^{+\infty} f(t)\,dt$ converge car $\int_A^x f(t)\,dt$ majorée et f positive !

Défi :

2) 1) Si $\exists x \in E \setminus \{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $u(x) = \lambda x$ alors on dit que λ est vap de u et que x est vp. associé à λ.

2) $q(X) = {}^tX\,{}^tA A X + {}^tX A\,{}^tA X = {}^t(AX)(AX) + {}^t({}^tAX)({}^tAX)$

Or $\forall Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, ${}^tYY = \sum_{i=0}^{n} y_i^2 \geq 0$

(et ${}^tYY = 0$ ssi $y_i = 0$ $\forall i \in [\![1;n]\!]$ ssi $Y = 0$)

(propriété $\star$)

Ainsi $q(X) \geq 0$ et donc comme $q(X) = {}^tX k X = k({}^tXX) \geq 0$

alors, comme $\underbrace{{}^tXX \geq 0}_{(cf *)}$, $k \geq 0$.

3) Si $k = 0$ alors ${}^tAA + A{}^tA = 0$

Méthode 1 : donc $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$

$q(X) = 0$ donc

$\underbrace{{}^t(AX)(AX)}_{\in \mathbb{R}_+} + \underbrace{{}^t({}^tAX)({}^tAX)}_{\in \mathbb{R}_+} = 0$

donc ${}^t(AX)(AX) = 0$

donc $AX = 0$ (cf *)

Comme $AX = 0$ $\underline{\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})}$

alors $A = 0$

Méthode 2 :

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

alors ${}^tAA = (b_{ij})_{i,j}$

avec $b_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2$

et si $A{}^tA = (c_{ij})_{i,j}$ alors

$c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2$

D'où si ${}^tAA + A{}^tA = 0$

alors $\forall i \in [\![1;n]\!]$

$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 + a_{ki}^2 = 0$ D'où

$\forall k \in [\![1;n]\!]$ $a_{ik} = a_{ki} = 0$

4) Soit $X \in \mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Ker}({}^tA)$

alors $AX = {}^tAX = 0$

Ainsi ${}^tAAX = 0$

et $A{}^tAX = 0$

D'où $kIX = kX = 0$

D'où $X = 0$

Ainsi $\mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Ker}({}^tA) = \{0_{n,1}\}$

D'où $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) = \{0\}$

car si $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$ alors $f(x) = g(x) = 0$ et donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}} f(x) = AX = 0$

(Si $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}\, x$) et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}\, g(x) = {}^tAX = 0$

5) a) On a $BX = \lambda X$ càd ${}^t\!AAX = \lambda X$

donc ${}^tX\,{}^t\!AAX = \lambda\,{}^tXX$

d'où $\underbrace{{}^t(AX)AX}_{\in \mathbb{R}_+} = \lambda \underbrace{({}^tXX)}_{\in \mathbb{R}_+}$

D'où $\lambda \geqslant 0$

b) Comme ${}^t\!AAX = \lambda X$ alors $(-A\,{}^t\!AX + kIX) = \lambda X$

d'où $A\,{}^t\!AX = (-\lambda + k)X$

D'où X vp associé à $k - \lambda$ (associé à $A\,{}^t\!A$)

Or par la m̂ idée que a) les vap de $A\,{}^t\!A$ sont $\geqslant 0$

D'où $k - \lambda \geqslant 0$ donc $k \geqslant \lambda$.

c) $BAX = {}^t\!AAAX = (kI - A\,{}^t\!A)AX = kAX - A\,{}^t\!AAX$
$= kAX - A\lambda X = AX\underbrace{(k-\lambda)}_{=\mu}$

$B\,{}^t\!AX = {}^t\!AA\,{}^t\!AX = {}^t\!A\mu X = \mu\,{}^t\!AX$

d) Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} E_\lambda & \longrightarrow & E_\mu \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$. φ est clairement linéaire.

Montrons $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$: soit X tq $AX = 0$ alors ${}^t\!AAX = 0$
$X \in E_\lambda$

et donc $\lambda X = 0$. Donc, comme $\lambda \neq 0$, $X = 0$

Ainsi φ est injective.

Soit $Y \in E_\mu$ alors ${}^t\!AAY = (k - \lambda)Y$

D'où $({}^t\!AA - kI)Y = -\lambda Y$

donc $A\,{}^t\!AY = \lambda Y$

donc $A\left(\frac{{}^t\!AY}{\lambda}\right) = Y$ donc $\varphi\left(\frac{{}^t\!AY}{\lambda}\right) = Y$

D'où Y a un antécédent dans E_λ et donc φ est bijective.

Or $\frac{B\,{}^t\!AY}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}{}^t\!AA\,{}^t\!AY = \frac{1}{\lambda}\lambda\,{}^t\!AY = \lambda \times \frac{{}^t\!AY}{\lambda}$

$\uparrow$ car si Y vp associé à μ et B alors par c) ${}^t\!AY$ est vp associé à $k - \mu = \lambda$.
$(\mu \in]0;k[)$