a) Montrons que E est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Soit $f_1, f_2 \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors $\alpha\underbrace{(\alpha_1 f + \beta_1 f^2)}_{f_1} + \beta\underbrace{(\alpha_2 f + \beta_2 f^2)}_{f_2} = f(\alpha\alpha_1 + \beta\alpha_2) + f^2(\alpha\beta_1 + \beta\beta_2) \in E$.

Ainsi E est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

De m pour F : $\alpha(\alpha_1 f^3) + \beta(\alpha_2 f^3) = f^3(\alpha\alpha_1 + \beta\alpha_2) \in F$.

b) Soit $g \in E \cap F$

alors $g = \alpha f + \beta f^2 = \gamma f^3$

donc $\alpha f + \beta f^2 = \gamma f^3$

donc f étant une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\pi/2 ; \pi/2[$

alors $\alpha x + \beta x^2 = \gamma x^3 \quad \forall x \in]-\pi/2 ; \pi/2[$

$\Leftrightarrow \alpha x + \beta x^2 - \gamma x^3 = 0$

donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$

d'où $E \cap F = \{0\}$

Restriction des fonctions affines sur $[-1;0]$ et $[0;1]$.

a) C'est trivial car une combinaison linéaire de fonctions affines (et continues) restent affines (et continues)

b) $f|_{[-1;0]} : x \longmapsto ax + b$

$f|_{[0;1]} : x \longmapsto cx + d$

f continue en 0 donc $b = d$

donc $f|_{[-1;0]} : x \longmapsto ax + b$

$f|_{[0;1]} : x \longmapsto cx + b$

$f(x) = \frac{a+c}{2} x + \frac{a-c}{2}|x| + b$

On remarque alors que $\{x ; |x| ; 1\}$ forment une famille libre et que elle est génératrice donc c'est une base

$F \cap G = F' \cap G' \Rightarrow F = (F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G'))$

Soit $x \in F$ alors $x \in F + (G \cap F')$ et $x \in F + (G \cap G')$ donc on a $\supset$

Soit $x \in F + (G \cap F')$: $x = y_1 + z_1$ avec $y_1 \in F$ et $z_1 \in G \cap F'$.

et $x \in F + (G \cap G')$: $x = y_2 + z_2$ avec $y_2 \in F$ et $z_2 \in G \cap G'$

Donc $y_1 + z_1 = y_2 + z_2 \Leftrightarrow \underset{F}{\underset{\cap}{y_1}} - y_2 = \underset{G}{\underset{\cap}{z_2}} - z_1$ ainsi $\in F' \cap G'$

Donc $-z_1 = y_1 - y_2 - z_2 \in G'$

et $z_1 \in F'$ donc $z_1 \in F' \cap G' = F \cap G$

D'où $z_1 \in F$, $y_1 \in F$ donc $z_1 + y_1 = x \in F$.

$\bigoplus_{i=1}^{n} E_i = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$

Soit $x \in F_i$, on a $x \in \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$ donc $x = x_1 + \dots + x_n$ avec $\forall i \in [\![1;n]\!]$ $x_i \in E_i$

Donc $0 = \underset{F_1}{\underset{\cap}{x_1}} + \dots + \underset{F_i}{\underset{\cap}{(x_i - x)}} + \dots + \underset{F_n}{\underset{\cap}{x_n}}$ car $E_i \subset F_i$

Donc $x_i - x = 0$ car la somme est directe

et $x = x_i$.

$\star$ Supposons (i) et montrons (ii).

D'après le théorème du rang, $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f = 2 \operatorname{rg} f$, puisque $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$. Ainsi $\dim E$ est paire.

$\star$ Supposons (ii) et montrons (i).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dim E = 2n$. Soit $(e_1, \dots, e_{2n})$ une base de E. Une application linéaire étant parfaitement définie par la donnée des transformés des vecteurs d'une base, on définit f linéaire de la manière suivante :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ f(e_i) = 0_E,\ f(e_{i+n}) = e_i$$

Il est alors clair que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, donc f convient.

Si $\dim E = 0$, alors l'endomorphisme nul de E vérifie $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f\ (= E)$ et ce cas dégénéré rejoint le cas général.

Les F_i sont des ev : facile à prouver.

Supposons $P_0 + \dots + P_n = 0$ avec $P_i \in F_i$

Donc $\forall i \in [\![0 ; n]\!]$: P_i a n racines et $(P_0 + \dots + P_n)(i) = 0$ donc $\underset{= 0}{P_i(i) = -P_0(i) + \dots}$
(i n'en est pas une)

Donc P_i a $(n+1)$ racines et est de degré n donc $P_i = 0$.

Soit $P = P_0 + \dots + P_n$ avec $P_i \in F_i$

alors par $P(i) = P_i(i)$ car $P_j(i) = 0$ $\forall i \neq j$:

On trouve $P_i = P(i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(X - j)}{i - j}$ (Lagrange)

On vérifie : $P_i \in F_i$ et $P = P_0 + \dots + P_n$ (unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange).

$\star$ Soit $y \in \operatorname{Im}(f+g)$: $\exists x \in E$ tel que $y = (f+g)(x) = f(x) + g(x)$ et donc $y \in \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$.
Ainsi $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$, d'où :

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Im}(f+g) &\leqslant \dim(\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g) = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Im} g - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g). \\ &\leqslant \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Im} g \end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$\boxed{\operatorname{rg}(f+g) \leqslant \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)}$$

[Le fait que F soit de dimension finie n'est pas utile, puisque si E est de dimension finie, $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Im} g$ sont des sous-espaces de F qui sont, eux, de dimension finie et c'est ce qui sert dans le raisonnement précédent.]

$\star$ On a $f = (f+g) + (-g)$, donc le résultat précédent donne :

$$\operatorname{rg}(f) \leqslant \operatorname{rg}(f+g) + \operatorname{rg}(-g) = \operatorname{rg}(f+g) + \operatorname{rg}(g), \text{ donc } \operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g) \leqslant \operatorname{rg}(f+g).$$

En échangeant les rôles de f et g, on a aussi :

$$\operatorname{rg}(g) - \operatorname{rg}(f) \leqslant \operatorname{rg}(g+f) = \operatorname{rg}(f+g).$$

Ces deux résultat peuvent s'énoncer en une seule fois :

$$\boxed{|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)| \leqslant \operatorname{rg}(f+g)}$$

Par contraposée: si e n'est pas une base de E alors $\operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_n) \neq E$.
Soit H un hyperplan tel que $\operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_n) \subset H$ et f une forme linéaire non nulle de noyau H.
On a $f(e_1) = \dots = f(e_n) = 0$ mais $f \neq 0$.

(a) Soit $x \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g$.
Il existe $a \in E$ tel que $x = f(a)$ donc

$$x = f(a) = (f \circ g \circ f)(a) = (f \circ g)(x) = 0.$$

Soit $x \in E$.
Analyse:
Supposons $x = u + v$ avec $u = f(a) \in \operatorname{Im} f$ et $v \in \operatorname{Ker} g$.
$g(x) = g \circ f(a)$ donc $(f \circ g)(x) = f(a) = u$.
Synthèse:
Posons $u = (f \circ g)(x)$ et $v = x - u$.
On a $u \in \operatorname{Im} f$, $x = u + v$ et $g(v) = g(x) - g(u) = 0$ *i.e.* $v \in \operatorname{Ker} g$.
(b) On a immédiatement $f(\operatorname{Im} g) \subset \operatorname{Im} f$.
Inversement, pour $y \in \operatorname{Im} f$, on peut écrire $y = f(x)$ avec $x \in E$.
Par symétrie, on a $E = \operatorname{Im} g \oplus \operatorname{Ker} f$ et on peut écrire

$$x = g(a) + u \text{ avec } a \in E \text{ et } u \in \operatorname{Ker} f.$$

On a alors $y = f(g(a)) \in f(\operatorname{Im} g)$ et l'on obtient l'inclusion $\operatorname{Im} f \subset f(\operatorname{Im} g)$.

1°) Comme $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = H_1 + H_2$, tout élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ – en particulier id – peut s'écrire comme la somme d'un élément de H_1 et d'un élément de H_2 (d'ailleurs de façon unique puisque l'on a même $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = H_1 \oplus H_2$).

$$\boxed{\exists!\,(p_1, p_2) \in H_1 \times H_2,\ p_1 + p_2 = id}$$

2°) On compose l'égalité $p_1 + p_2 = id$ par p_1, une fois à gauche et une fois à droite, pour obtenir :

$$\begin{cases} p_1^2 + p_1 \circ p_2 = p_1 \\ p_1^2 + p_2 \circ p_1 = p_1 \end{cases}$$

On additionne ces deux égalités de sorte que : $2p_1^2 + p_1 \circ p_2 + p_2 \circ p_1 = 2p_1$
Mais comme $p_1 \in H_1$ et $p_2 \in H_2$, on a $p_1 \circ p_2 + p_2 \circ p_1 = 0$. Ainsi $2p_1^2 = 2p_1$ et finalement $p_1^2 = p_1$. Donc p_1 est un projecteur.
En échangeant les rôles de p_1 et p_2, on démontre de même que p_2 est un projecteur. On peut aussi remarquer que $p_2 = id - p_1$ est le projecteur conjugué du projecteur p_1.
3°) Soit $f \in H_1$. On a donc $f \circ p_2 + p_2 \circ f = 0$. Comme p_2 est un projecteur, les sous-espaces $E_1 = \operatorname{Ker}(p_2)$ et $E_2 = \operatorname{Im}(p_2)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

$\star$ Pour tout $x \in E_1$, on a $p_2(x) = 0$ et donc $0 = f \circ p_2(x) + p_2 \circ f(x) = p_2(f(x))$ et $f(x) \in E_1$. Donc E_1 est stable par f.

$\star$ Pour tout $x \in E_2$, on $p_2(x) = x$ et donc $0 = f \circ p_2(x) + p_2 \circ f(x) = f(x) + p_2(f(x))$.

Ainsi $f(x) = p_2(-f(x))$ appartient à $\operatorname{Im}(p_2) = E_2$. Mais pour $f(x) \in E_2$, on a $p_2(f(x)) = f(x)$ et donc $2f(x) = 0$, *i.e.* $f(x) = 0$ et $E_2 \subset \operatorname{Ker}(f)$.

Bref, si f appartient à H_1, alors la restriction de f à E_2 est l'application nulle et la restriction de f à E_1 réalise un endomorphisme de E_1.

Or l'application ψ de $\mathcal{L}(E_1)$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, qui à $\varphi \in \mathcal{L}(E_1)$ associe l'application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ définie par $\forall x \in E_1,\ f(x) = \varphi(x)$ et $\forall x \in E_2,\ f(x) = 0$ est évidemment linéaire et injective (si les restrictions de f à E_1 et E_2 sont nulles, alors f est nulle) et son image est formée justement des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ dont le noyau contient E_2 et pour lesquels E_1 est stable, cette image contient donc H_1.

Par injectivité de ψ, on a :

$$\dim \psi(\mathcal{L}(E_1)) = \dim(\mathcal{L}(E_1)) = [\dim E_1]^2 = [n - \dim E_2]^2 = [n - \mathrm{rg}(p_2)]^2$$

et l'inclusion précédente donne : $\dim H_1 \leqslant [n - \mathrm{rg}(p_2)]^2$

En permutant les rôles de p_1 et p_2, on a de même $\dim H_2 \leqslant [n - \mathrm{rg}(p_1)]^2$.

4°) $\star$ N'oublions pas que comme $p_1 + p_2 = id$, alors avec les notations précédentes, on a :

$$\mathrm{Ker}(p_1) = \mathrm{Im}(p_2) = E_2 \text{ et } \mathrm{Im}(p_1) = \mathrm{Ker}(p_2) = E_1$$

et donc $\mathrm{rg}(p_1) + \mathrm{rg}(p_2) = \dim E_1 + \dim E_2 = n$.

$\star$ N'oublions pas non plus que H_1 et H_2 sont supplémentaires dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Ainsi :

$$n^2 = \dim(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)) = \dim H_1 + \dim H_2 \leqslant [n - \dim E_2]^2 + [n - \dim E_1]^2$$
$$\leqslant [n - \dim E_2]^2 + [\dim E_2]^2 = n^2 - 2n \dim E_2 + 2[\dim E_2]^2.$$

Ainsi $0 \leqslant 2[\dim E_2]^2 - 2n \dim E_2 = 2 \dim E_2(\dim E_2 - n)$.

Or $\dim E_2 \leqslant n$ et si $E_2 \neq \mathbb{R}^n$, alors $\dim E_2 - n < 0$, donc $2 \dim E_2(\dim E_2 - n) \geqslant 0$ impose $\dim E_2 \leqslant 0$, donc $E_2 = \{0\}$. On n'a donc que deux choix : $E_2 = \mathbb{R}^n$ ou $E_2 = \{0\}$.

Mais $E_2 = \mathbb{R}^n$ donne $p_2 = id$, $\mathrm{rg}(p_2) = n$ et $\dim H_1 \leqslant [n - n]^2 = 0$, donc $H_1 = \{0\}$ (et puisque H_1 et H_2 sont supplémentaires dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, on a alors $H_2 = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$).

Tandis que si $E_2 = \{0\}$, alors $E_1 = \mathbb{R}^n$ et de façon symétrique $H_2 = \{0\}$ et $H_1 = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Réciproquement, on vérifie aisément que les deux couples

$$(H_1, H_2) = (0, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)) \text{ et } (H_1, H_2) = (\mathcal{L}(\mathbb{R}^n), 0)$$

vérifient bien les hypothèses de l'énoncé.

[La clé de cet exercice réside dans le fait que si f appartient à H_1, alors on sait ce que vaut f sur E_2 et E_1 est stable par f. Si on a déjà vu un peu de calcul matriciel, on peut le voir en considérant une base de $\mathbb{R}^n$ obtenue en mettant bout à bout (on dit : en concaténant) une base de E_1 et une base de E_2. La matrice de P de p_2 dans une telle base est connue, la matrice F d'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ s'écrit alors par blocs et l'équation $FP + PF = 0_n$ se traduit aisément par blocs, ce qui donne la forme de F et la nullité de f sur E_2, ainsi que la stabilité de E_1 par f ...]

(a) Puisque $U + V \subset E$, on a $\dim(U + V) \leq n$. La formule des quatre dimensions donne alors

$$\dim U + \dim V - \dim(U \cap V) = \dim(U + V) \leq n.$$

L'hypothèse de travail fournit alors $\dim(U \cap V) > 0$.

(b) Introduisons l'espace $W' = U \cap V$. Par la fomule des quatre dimensions

$$\dim W' = \dim U + \dim V - \dim(U + V) \geq \dim U + \dim V - n.$$

On a donc

$$\dim W' + \dim W \geq \dim U + \dim V + \dim W - n > n.$$

L'étude précédent assure alors que l'espace $U \cap V \cap W = W' \cap W$ n'est pas réduit à l'espace nul.