A Implication et équivalence

A.1 Faire ses gammes

1 Écrire les propositions suivantes sous la forme « si... alors... ».

1. « un triangle équilatéral a trois angles de 60° »
2. « qui ne dit mot, consent »
3. « vouloir c'est pouvoir »

2 Soit A la proposition « le chien aboie » et B la proposition « la voiture passe ».
Traduisez les propositions suivantes en langage mathématique :

1. Si la voiture passe, alors le chien aboie.
2. La voiture passe si le chien aboie.
3. La voiture ne passe pas seulement si le chien n'aboie pas.
4. Le chien aboie si et seulement si la voiture passe.

3 Compléter le tableau ci-dessous par V ou F (vrai ou faux).

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \Leftrightarrow B$
$x = 2$	$x^2 = 4$			
J'habite à Madrid	J'habite en Espagne			
$AB \neq CD$	$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$			
$\lvert x-3 \rvert \leq 5$	$x \in [2;8]$			

A.2 Exercices d'entraînement

4

1. Les propositions ci-dessous sont-elles vraies ? Si non, donner un contre-exemple.
2. Dans chacun des cas :
   (a) Énoncer la réciproque.
   (b) Est-elle vraie ? Si non, donner un contre-exemple.

A : « Si $ABCD$ est un carré, alors (AB) et (CD) sont parallèles ».
B : « Si un entier est un multiple de 5, alors c'est un multiple de 10 ».
C : « Un carré est un rectangle »
D : « Si je suis fils unique, alors je n'ai pas de frère »
E : « Si je suis un losange, alors mes diagonales sont perpendiculaires ».

5 Un parent dit à son enfant « si tu es sage, tu auras des bonbons ».
Que se passera-t-il si l'enfant n'est pas sage ?

6 Recopier et compléter les phrases suivantes avec « il faut », « il suffit », ou « il faut et il suffit » puis écrire la phrase en utilisant les symboles logiques.

1. Pour que $x \in [2;3]$, ... que $x \in [1{,}99;3{,}01]$.
2. Pour que la variance d'une série statistique soit nulle, ... que toutes les valeurs de la série soient égales.
3. Pour que $ABCD$ soit un carré, ... que $ABCD$ ait quatre angles droits.
4. Pour que $x^2 > 1$, ... que $x > 2$.
5. Pour que $M \in [AB]$, ... que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient colinéaires.

B Opérateurs logiques, quantificateurs

B.1 Faire ses gammes

7 Les propositions suivantes sont-elles vraies ?

1. « 4 est pair et 6 est impair »
2. « 4 est pair ou 6 est impair »

8 Énoncer la négation des propositions suivantes :

1. « Tout triangle rectangle possède un angle droit »
2. « Dans toutes les prisons tous les détenus détestent tous les gardiens »

9 Écrire la négation des propositions suivantes :

1. $P \wedge (\neg Q)$ 2. $P \vee (\neg Q)$ 3. $A \Rightarrow B$ 4. $x < 3$ et $x \geq 1$

10 Soient x et y deux réels.
Compléter la colonne du milieu avec le bon symbole logique :

x est un multiple de 5		Le chiffre des unités est 5
$xy > 0$		$x > 0$ et $y > 0$
Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$		A, B et C sont alignés

B.2 Exercices d'entraînement

11 Pour chaque proposition ci-dessous, dire si elle est vraie, et écrire sa négation.

1. $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 \leq 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ (x+2)^2 = x^2 + 4x + 1$.

3. $\exists n \in \mathbb{N}, n > 1 \wedge n \leq 3$.
4. $\forall n \in \mathbb{Z}, n^2 > 0$.

12 Soient a et b deux nombres réels.
On considère la proposition A : « $a^2 = b^2$ » et les propositions suivantes :

$\boxed{I}$ $a = b$

$\boxed{II}$ $a = -b$

$\boxed{III}$ $(a+b)(a-b) = 0$

$\boxed{IV}$ $a = b$ ou $a = -b$

$\boxed{V}$ $a = 0$ ou $b = 0$

1. Parmi les propositions ci-dessus, lesquelles sont telles que $\ldots \Rightarrow A$ est vraie ?
2. Parmi les propositions ci-dessus, lesquelles sont telles que $A \Rightarrow \ldots$ est vraie ?
3. Quelles sont les propositions équivalentes ?
4. En déduire les solutions de $(2x-3)^2 = (2x+9)^2$.

13 Écrire les phrases suivantes puis leur négation, dans le langage mathématique :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
2. f prend au moins une valeur positive sur $\mathbb{R}^+$.
3. f prend toujours des valeurs strictement inférieures à 1.
4. f est minorée sur $[a;b]$.
5. Il n'existe pas de plus grand élément dans $\mathbb{N}$.

14 Écrire la négation des propositions suivantes :

1. $P \Rightarrow (\neg Q)$ 2. $A \Leftrightarrow B$ 3. $P \vee (Q \wedge R)$ 4. $P \wedge (Q \vee R)$
5. $\neg(P \vee Q) \Rightarrow R$

15 Démontrer que pour tous réels a et b, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

C Raisonnements

C.1 Faire ses gammes

16 Une réunion de cosmonautes du monde entier a lieu à Paris. Les cosmonautes américains portent tous une chemise rouge.

1. À l'aéroport, on voit quelqu'un qui porte une chemise blanche.
   Est-il cosmonaute américain ?
2. À côté de la personne précédente, on voit quel'un qui porte une chemise rouge.
   Est-il cosmonaute américain ?
3. Le haut-parleur annonce l'arrivée d'un cosmonaute russe.
   Porte-il une chemise rouge ?
4. Dans le hall, on voit un cosmonaute américain qui porte un manteau.
   Porte-t-il une chemise rouge ?

17 On suppose que l'implication « Si Michel a son bac, ses parents lui paient une guitare » est vraie.
Vous rencontrez Michel après son bac.
Pour chacun des raisonnements ci-dessous, dire s'il est correct. *Justifier*.

1. il a une guitare, vous en déduisez qu'il a eu son bac ;
2. il n'a pas de guitare, vous en déduisez qu'il n'a pas eu son bac.

C.2 Exercices d'entraînement

18 Démontrer par l'absurde que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n^2 est impair, alors n est impair.

19 Soient a et b deux réels.
Démontrer par contraposition la proposition « $(a+b)^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$ ».

20 On juge A, B et C qui sont accusés de vol. On a prouvé que :

1. Si A est innocent ou si B est coupable, alors C est coupable.
2. Si A est innocent, alors C est innocent.

Peut-on prouver la culpabilité de l'un des trois ?

21 On présente quatre cartes sur lesquelles il est écrit respectivement :

« A », « B », « 4 » et « 7 »

On sait que pour chaque carte, il y a une lettre sur une des faces et un nombre sur l'autre face. On ne peut pas voir voir l'autre face.
Quel est le nombre minimum de cartes à retourner pour déterminer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse :

« Si une des cartes a une voyelle écrite sur une face, alors il y a un nombre pair écrit sur l'autre face » ?

22 Démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

23 Les quatres phrases ci-dessous forment un système logique cohérent.
Combien y a-t-il de phrases vraies ?

1. Aucune de ces phrases n'est vraie
2. Une seule de ces phrases est fausse.
3. Deux exactement de ces phrases sont vraies.
4. Deux au moins de ces phrases sont fausses.