A Implication et équivalence

A.1 Faire ses gammes

1 Écrire les propositions suivantes sous la forme « si... alors... ».

1. « un triangle équilatéral a trois angles de 60° »
2. « qui ne dit mot, consent »
3. « vouloir c'est pouvoir »

1. « si un triangle est équilatéral, alors il a trois angles de 60° »
2. « si quelqu'un ne dit mot, alors il consent »
3. « si on veut, alors on peut »

2 Soit A la proposition « le chien aboie » et B la proposition « la voiture passe ». Traduisez les propositions suivantes en langage mathématique :

1. Si la voiture passe, alors le chien aboie.
2. La voiture passe si le chien aboie.
3. La voiture ne passe pas seulement si le chien n'aboie pas.
4. Le chien aboie si et seulement si la voiture passe.

1. $B \Rightarrow A$
2. $A \Rightarrow B$
3. $\neg B \Rightarrow \neg A$
4. $A \Leftrightarrow B$

3 Compléter le tableau ci-dessous par V ou F (vrai ou faux).

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \Leftrightarrow B$
$x = 2$	$x^2 = 4$	V	F	F
J'habite à Madrid	J'habite en Espagne	V	F	F
$AB \neq CD$	$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$	V	F	F
$\lvert x-3\rvert \leq 5$	$x \in [2;8]$	F	V	F

A.2 Exercices d'entraînement

4

1. Les propositions ci-dessous sont-elles vraies ? Si non, donner un contre-exemple.
2. Dans chacun des cas :
   (a) Énoncer la réciproque.
   (b) Est-elle vraie ? Si non, donner un contre-exemple.

A : « Si $ABCD$ est un carré, alors (AB) et (CD) sont parallèles ».
B : « Si un entier est un multiple de 5, alors c'est un multiple de 10 ».
C : « Un carré est un rectangle »
D : « Si je suis fils unique, alors je n'ai pas de frère »
E : « Si je suis un losange, alors mes diagonales sont perpendiculaires ».

A. La proposition est vraie.
La réciproque est : « Si (AB) et (CD) sont parallèles, alors $ABCD$ est un carré ».
Elle est fausse, on peut construire un trapèze $ABCD$ tel que (AB) et (CD) soient parallèles et que $ABCD$ ne soit pas un carré.

B. Faux, 5 est un multiple de 5 mais n'est pas un multiple de 10.
La réciproque est : « si un entier est un multiple de 10, alors c'est un multiple de 5 ».
Elle est vraie.

C. On peut la reformuler ainsi : « si une figure est un carré, alors c'est un rectangle ».
Cette proposition est vraie.
La réciproque est : « Si une figure est un rectangle, alors c'est un carré ».
Cette proposition est fausse, on peut construire un rectangle tel que longueur et largeur ne sont pas égales, et qui n'est donc pas un carré.

D. Cette proposition est vraie.
La réciproque est : « si je n'ai pas de frère, alors je suis fils unique ».
Elle est fausse, car une personne peut ne pas avoir de frère mais avoir une ou plusieurs soeurs.

E. La proposition est vraie.
La réciproque est : « Si un quadrilatère a ses diagonales perpendiculaires »

5 Un parent dit à son enfant « si tu es sage, tu auras des bonbons ». Que se passera-t-il si l'enfant n'est pas sage ?

On ne sait pas.
Notons A la proposition « tu es sage » et B la proposition « je te donnerai des bonbons ».
La phrase correspond à la proposition $A \Rightarrow B$.
Un mauvais raisonnement serait d'affirmer que l'enfant n'aura pas de bonbon.
En effet cela reviendrait à considérer que la proposition $\neg A \Rightarrow \neg B$ est vraie, ce que l'on ne peut pas déduire de $A \Rightarrow B$.
Étude du problème avec toutes les notions du chapitre :
La réciproque de $A \Rightarrow B$ est $B \Rightarrow A$, dont la contraposée est $\neg A \Rightarrow \neg B$.

Donc déduire de $A \Rightarrow B$ que $\neg A \Rightarrow \neg B$ est vraie revient à considérer que si une implication est vraie, alors sa réciproque l'est aussi, autrement dit à confondre implication et équivalence.

6 Recopier et compléter les phrases suivantes avec « il faut », « il suffit », ou « il faut et il suffit » puis écrire la phrase en utilisant les symboles logiques.

1. Pour que $x \in [2;3]$, il faut que $x \in [1{,}99;3{,}01]$.
2. Pour que la variance d'une série statistique soit nulle, il faut et il suffit que toutes les valeurs de la série soient égales.
3. Pour que $ABCD$ soit un carré, il faut que $ABCD$ ait quatre angles droits.
4. Pour que $x^2 > 1$, il suffit que $x > 2$.
5. Pour que $M \in [AB]$, il faut que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient colinéaires.

B Opérateurs logiques, quantificateurs

B.1 Faire ses gammes

7 Les propositions suivantes sont-elles vraies ?

1. « 4 est pair et 6 est impair »
2. « 4 est pair ou 6 est impair »

1. Non car « 4 est pair » est vraie mais pas « 6 est impair ».
2. Oui car on a bien **au moins** une des deux propositions « 4 est pair » et « 6 est impair » qui est vraie.

8 Énoncer la négation des propositions suivantes :

1. « Tout triangle rectangle possède un angle droit »
2. « Dans toutes les prisons tous les détenus détestent tous les gardiens »

1. « Il existe au moins un triangle rectangle qui ne possède pas d'angle droit ».
2. « Il existe au moins une prison dans laquelle au moins un détenu ne déteste pas au moins un gardien ».

9 Écrire la négation des propositions suivantes :

1. $P \wedge (\neg Q)$ 2. $P \vee (\neg Q)$ 3. $A \Rightarrow B$ 4. $x < 3$ et $x \geq 1$

1. $\neg P \vee Q$
2. $\neg P \wedge Q$
3. $A \wedge \neg B$
4. $x \geq 3$ ou $x < 1$.

10 Soient x et y deux réels.
Compléter la colonne du milieu avec le bon symbole logique :

x est un multiple de 5	$\Leftarrow$	Le chiffre des unités est 5
$xy > 0$	$\Leftarrow$	$x > 0$ et $y > 0$
Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$	$\times$	A, B et C sont alignés

- Contre exemple pour « $\Rightarrow$ » : 10 est un multiple de 5 mais son chiffre des unités n'est pas 5.
- Contre exemple pour « $\Rightarrow$ » : $(-1) \times (-2) > 0$, mais « $x > 0$ et $y > 0$ » est faux.

B.2 Exercices d'entraînement

11 Pour chaque proposition ci-dessous, dire si elle est vraie, et écrire sa négation.

1. $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 \leq 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ (x+2)^2 = x^2 + 4x + 1$.
3. $\exists n \in \mathbb{N},\ n > 1 \wedge n \leq 3$.
4. $\forall n \in \mathbb{Z}, n^2 > 0$.

1. Vrai : $0^2 \leq 0$.
   Négation : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$.
2. Faux.
   Négation : « $\exists x \in \mathbb{R}, (x+2)^2 \neq x^2 + 4x + 1$ ».
3. Vrai : $2 > 1$ et $2 \leq 3$.
   Négation : « $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq 1 \vee n > 3$ ».
4. Faux : $0^2 \leq 0$.
   Négation : « $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 \leq 0$ ».

12 Soient a et b deux nombres réels.
On considère la proposition A : « $a^2 = b^2$ » et les propositions suivantes :

$\boxed{I}$ $a = b$

$\boxed{II}$ $a = -b$

$\boxed{III}$ $(a+b)(a-b) = 0$

$\boxed{IV}$ $a = b$ ou $a = -b$

$\boxed{V}$ $a = 0$ ou $b = 0$

1. Parmi les propositions ci-dessus, lesquelles sont telles que $\ldots \Rightarrow A$ est vraie ?
2. Parmi les propositions ci-dessus, lesquelles sont telles que $A \Rightarrow \ldots$ est vraie ?
3. Quelles sont les propositions équivalentes ?
4. En déduire les solutions de $(2x-3)^2 = (2x+9)^2$.

1. Les propositions I, II, III et IV.
2. Les propositions III et IV.
3. On en déduit que les propositions III, IV et A sont équivalentes.
4. $(2x-3)^2 = (2x+9)^2$ est de la forme $a^2 = b^2$ avec $a = 2x-3$ et $b = 2x+9$.
   Ainsi :

$$\begin{aligned}(2x-3)^2 = (2x+9)^2 &\Leftrightarrow 2x-3 = 2x+9 \quad \text{ou} \quad 2x-3 = -(2x+9)\\ &\Leftrightarrow -3 = 9 \quad \text{ou} \quad 4x = -6\\ &\Leftrightarrow -3 = 9 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

   On en déduit $S = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$.

13 Écrire les phrases suivantes puis leur négation, dans le langage mathématique :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
2. f prend au moins une valeur positive sur $\mathbb{R}^+$.
3. f prend toujours des valeurs strictement inférieures à 1.
4. f est minorée sur $[a;b]$.
5. Il n'existe pas de plus grand élément dans $\mathbb{N}$.

1. $\forall (a;b) \in (\mathbb{R}^+)^2,\ a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$.
   $(\mathbb{R}^+)^2$ est l'ensemble qui contient tous les couples de la forme (a,b), avec $a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{R}^+$.
   De même $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble de tous les couples de réels.
   Il s'agit du « produit cartésien » $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
   De manière générale, $A \times B$ est l'ensemble des couples $(a;b)$ avec $a \in A$ et $b \in B$.
   Négation : « $\exists (a;b) \in (\mathbb{R}^+)^2,\ (a \leq b) \wedge \big(f(a) > f(b)\big)$ ».
2. $\exists x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) \geq 0$.
   Négation : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) < 0$.
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) < 1$.
   Négation : $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 1$.
4. $\exists m \in [a;b],\ \forall x \in [a;b],\ f(x) \geq m$.
   Négation : $\forall m \in [a;b],\ \exists x \in [a;b],\ f(x) < m$.
5. $\forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ n > N$.
   Négation : $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \leq N$.

14 Écrire la négation des propositions suivantes :

1. $P \Rightarrow (\neg Q)$
2. $A \Leftrightarrow B$
3. $P \vee (Q \wedge R)$
4. $P \wedge (Q \vee R)$
5. $\neg(P \vee Q) \Rightarrow R$

1. $P \wedge Q$
2. $(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)$.
3. $\neg P \wedge (\neg Q \vee \neg R)$.
4. $\neg P \vee (\neg Q \wedge \neg R)$.
5. $\neg(P \vee Q) \wedge \neg R$.

15 Démontrer que pour tous réels a et b, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Soient a et b deux réels (introduire les réels a et b ainsi permet de considérer deux réels, n'importe lesquels).

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a^2 + ab + ba + b^2\\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

C Raisonnements

C.1 Faire ses gammes

16 Une réunion de cosmonautes du monde entier a lieu à Paris. Les cosmonautes américains portent tous une chemise rouge.

1. À l'aéroport, on voit quelqu'un qui porte une chemise blanche.
   Est-il cosmonaute américain ?
2. À côté de la personne précédente, on voit quelqu'un qui porte une chemise rouge.
   Est-il cosmonaute américain ?
3. Le haut-parleur annonce l'arrivée d'un cosmonaute russe.
   Porte-il une chemise rouge ?
4. Dans le hall, on voit un cosmonaute américain qui porte un manteau.
   Porte-t-il une chemise rouge ?

Pour répondre aux questions, on peut noter A la proposition « le cosmonaute est américain » et R la proposition « la personne a une chemise rouge ».

1. Tous les cosmonautes américains portent une chemise rouge.

Autrement dit : « si un cosmonaute est américain, alors il porte une chemise rouge ».
Qu'on peut formuler : $A \Rightarrow R$.
La contraposée de cette proposition est « si un cosmonaute ne porte pas de chemise rouge, alors il n'est pas américain », soit $\neg R \Rightarrow \neg A$.
Donc le cosmonaute n'est pas américain.

2. On ne dit pas que « si un cosmonaute porte une chemise rouge, alors il est américain ».
   Autrement dit, on ne dit pas $R \Rightarrow A$, qui est la réciproque de ce qui affirmé dans l'énoncé.
   Donc on ne peut pas répondre.
3. On ne peut pas répondre. On ne sait pas si les implications $\neg A \Rightarrow R$ et $\neg A \Rightarrow \neg R$ sont vraies.
4. $A \Rightarrow R$, donc il porte une chemise rouge.

17 On suppose que l'implication « Si Michel a son bac, ses parents lui paient une guitare » est vraie.
Vous rencontrez Michel après son bac.
Pour chacun des raisonnements ci-dessous, dire s'il est correct. *Justifier*.

1. il a une guitare, vous en déduisez qu'il a eu son bac ;
2. il n'a pas de guitare, vous en déduisez qu'il n'a pas eu son bac.

Notons B la proposition « Michel a son bac » et G la proposition « Ses parents lui paient une guitare ».
On suppose dans cet exercice que $B \Rightarrow G$ est vraie.

1. Cela revient à affirmer $G \Rightarrow B$ qui est la réciproque de la proposition initiale.
   Donc le raisonnement n'est pas bon.
2. Cela revient à affirmer $\neg G \Rightarrow \neg B$, qui est la contraposée de $B \Rightarrow G$.
   Donc le raisonnement est bon.

C.2 Exercices d'entraînement

18 Démontrer par l'absurde que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n^2 est impair, alors n est impair.

Supposons que la proposition « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n^2 est impair, alors n est impair » soit fausse.
Il existe donc $n \in \mathbb{N}$, tel que n^2 est impair **et** n est pair.
On a donc $n = 2k$, avec $k \in \mathbb{N}$.
D'où : $n^2 = 4k^2 = 2 \times (2k^2)$.
Donc n^2 est pair et impair à la fois, ce qui est contradictoire.
Donc la proposition « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n^2 est impair, alors n est impair ».

19 Soient a et b deux réels.
Démontrer par contraposition la proposition « $(a+b)^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a = 0 \quad \text{ou} \quad b = 0$ ».

20 On juge A, B et C qui sont accusés de vol. On a prouvé que :

1. Si A est innocent ou si B est coupable, alors C est coupable.
2. Si A est innocent, alors C est innocent.

Peut-on prouver la culpabilité de l'un des trois ?

21 On présente quatre cartes sur lesquelles il est écrit respectivement :

« A », « B », « 4 » et « 7 »

On sait que pour chaque carte, il y a une lettre sur une des faces et un nombre sur l'autre face. On ne peut pas voir voir l'autre face.
Quel est le nombre minimum de cartes à retourner pour déterminer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse :

« Si une des cartes a une voyelle écrite sur une face, alors il y a un nombre pair écrit sur l'autre face » ?

22 Démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

23 Les quatres phrases ci-dessous forment un système logique cohérent.
Combien y a-t-il de phrases vraies ?

1. Aucune de ces phrases n'est vraie
2. Une seule de ces phrases est fausse.
3. Deux exactement de ces phrases sont vraies.
4. Deux au moins de ces phrases sont fausses.