12 Logique et rédaction

Introduction Les mathématiques sont construites sur la base d'axiomes, affirmations supposées vraies. On établit ensuite des règles de démonstration en définissant ce qu'est une implication, une équivalence etc. Cela permet alors de déterminer si tel ou tel énoncé est vrai. Le cas échéant, on appelle cet énoncé « théorème ».
Dans ce chapitre, nous allons expliciter les règles de base qui régissent le raisonnement mathématique, et faire le lien avec des éléments de rédaction que l'on rencontre souvent afin de mieux les comprendre et les utiliser.
La maîtrise de ce chapitre est un atout majeur pour la compréhension de tout cours de mathématiques.

I Énoncés mathématiques

I.1 Propositions et théorèmes

Définition 12.1 – Proposition

Une ______________ mathématique est un énoncé pouvant être vrai ou faux.

Exemple 12.1 :

1. « 4 est un nombre pair » est une proposition vraie.
2. « 5 est un multiple de 3 » est une proposition fausse.

Remarque(s) :

- Une proposition dont on a démontré qu'elle était vraie et qui revêt une importance particulière est alors appelée « théorème ».

I.2 Négation d'une proposition

Définition 12.2 – Négation

La ___________ d'une proposition A, notée ..... , ou ..., est un proposition qui est vraie lorsque A est fausse, et fausse lorsque A est vraie.

Exemple 12.2 :

Dans chacun des cas ci-dessous, énoncer $\neg A$:

1. A : « ABC est un triangle rectangle »

2. A : « $x \geq 4$ »

II Implication, réciproque et équivalence

Définition 12.3 – Implication

La proposition « si A, alors B », notée ...., est appelée ______________ .

1. A est une condition ____________ (i.e « il suffit » que A soit vraie pour que B soit vraie).
2. B est une condition ____________ (i.e si A est vraie, alors B est nécessairement vraie).

Remarque(s) :

- Pour démontrer qu'une proposition $A \Rightarrow B$ est vraie, on peut supposer que A est vraie, et démontrer qu'alors B est vraie.
- En langage naturel, $A \Rightarrow B$ peut aussi se lire :
  - « A ____________ B ».
  - « B ___ A »
  - « A _______________ B » (cela fait échos au fait que B est un condition nécessaire, A ne pas être vraie sans que B soit vraie).

⚠ Il ne faut pas confondre « implique » et « donc ». Le mot « donc » fait référence au raisonnement par déduction (voir propriété 12.3) et signifie davantage que l'implication.

Exemple 12.3 :

Soit P la proposition « si K est le milieu de $[AB]$, alors $KA = KB$ ».

1. P est-elle vraie ? Le démontrer le cas échéant.

2. En notant R la proposition « K est le milieu de $[AB]$ » et Q la proposition « $KA = KB$ », comment peut-on réécrire P en utilisant les symboles logiques ?

Définition 12.4 – Réciproque

La ______________ de la proposition $A \Rightarrow B$ est la proposition . . . .

Exemple 12.4 :

1. En reprenant la proposition P de l'exemple 12.3, énoncer la réciproque de P.
2. Est-elle vraie ? *Justifier*.

Définition 12.5 – Équivalence

Lorsque $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$ sont vraies, on dit que A et B sont ________________ , et on note . . . .
A et B sont alors toutes les deux des conditions ______________________________ .

Remarque(s) :

- En langage naturel, cela peut se lire :
  - « A ____________________ B »
  - « A _____________________ B ». Il s'agit d'une combinaison de « A si B » ($B \Rightarrow A$) et « A seulement si B » ($A \Rightarrow B$).

Exemple 12.5 :

Compléter le tableau ci-dessous par V ou F (vrai ou faux).

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \Leftrightarrow B$
(AB) et (CD) sont parallèles	$ABCD$ est un parallélogramme			
J'habite en Suisse	J'habite en Europe			
ABC est rectangle en B	$AC^2 = AB^2 + BC^2$			
C'est le 1er janvier	L'école est fermée			

III Opérateurs logiques

Définition 12.6 – ET

Soient A et B deux propositions.
La proposition _____________ , notée . . . . . , est vraie si et seulement si _______ et _____________ .

Définition 12.7 – OU

Soient A et B deux propositions.
La proposition _____________ , notée . . . . . , est vraie si et seulement si _______ ou _____________ .

Remarque(s) :

- Autrement dit, $A \vee B$ est vraie si au moins une des deux propositions A et B est vraie.

Propriété 12.1 – Lois de De Morgan

1. . . . .
2. . . . .

Exemple 12.6 :

Énoncer la négation des propositions suivantes :

1. « je suis un entier pair et je suis strictement plus grand que 5 »
2. « je ne prends pas le train ou je prends le vélo »

IV Quantificateurs

Introduction Certains propositions dépendent d'une ou plusieurs variables.
Une proposition P qui dépend d'une variable x peut être notée $P(x)$.
La proposition « $x+1>3$ » dépend de x, et n'est pas vraie pour tout réel x.
Ne pas introduire une variable pose plusieurs problèmes :

- on ne connaît pas exactement la nature de l'objet x introduit ;
- la proposition $P(x)$ peut être vraie pour certaines valeurs et fausse pour d'autres.

Une formulation correcte serait par exemple : « pour tout réel x, $x+1>3$ ». $P(x)$ est alors assurément fausse.

IV.1 « Pour tout »

Définition 12.8

La proposition « Pour tout x appartenant à E, $P(x)$ est vraie », notée « .... », est vraie si $P(x)$ est vraie quelle que soit la valeur de x choisie dans l'ensemble E.

Méthode Pour démontrer une proposition du type « Pour tout réel x... », on introduit un réel x quelconque avec la formulation « **soit** x un réel », qui permet de considérer un réel **quelconque** et donc d'effectuer une démonstration valable pour tous les éléments de $\mathbb{R}$.

Exemple 12.7 :

Démontrer que la proposition « $\forall x \in \mathbb{R}, (x+1)^2 = x^2+2x+1$ » est vraie.

IV.2 « Il existe »

Définition 12.9

1. La proposition « Il existe ____________ un x appartenant à E tel que $P(x)$ soit vraie », notée « .... » est vraie si l'on peut trouver au moins une valeur de x dans E pour laquelle $P(x)$ est vraie.
2. La proposition « Il existe ____________ x appartenant à E tel que $P(x)$ soit vraie », notée « .... » est vraie si l'on peut trouver une valeur de x dans E, et ____________ , pour laquelle $P(x)$ est vraie.

Méthode Pour démontrer une proposition du type « il existe au moins un x... », il suffit de trouver un tel élément et de montrer que la proposition est vraie pour celui-ci.

Exemple 12.8 :

Démontrer que la proposition « $\exists x \in \mathbb{R}, (x+1)^2 = x^2+1$ » est vraie.

On n'utilise jamais les symboles $\forall$ et $\exists$ dans une phrase en français.
Ex : on n'écrit pas « $\forall$ réel x, ... »

IV.3 Négations de « pour tout » et « il existe »

Propriété 12.2

1. $\neg\left(\forall x \in E, P(x)\right) \Leftrightarrow$ ....
2. $\neg\left(\exists x \in E, P(x)\right) \Leftrightarrow$ ....

Exemple 12.9 :

Énoncer la négations des propositions ci-dessous :

1. A : « Toutes les routes mènent à Rome »
2. B : « Certains mardis, je n'ai pas cours de maths »
3. C : « Tous les jeudis, j'ai cours de français et cours de physique »
4. D : « Certains vendredis, je n'ai pas cours de philosophie ou j'ai cours de biologie »

V Raisonnements

V.1 Par déduction

Propriété 12.3 – Raisonnement par déduction

Si A est vraie et que $A \Rightarrow B$ est vraie, alors B est vraie. On peut noter ce raisonnement ainsi :

....

Remarque(s) :

- C'est ce raisonnement que l'on utilise lorsqu'on emploie le mot « donc ».

Exemple 12.10 :

Soient A la proposition « les nuages sont gris » et B la proposition « il pleut ». Formuler le raisonnement par déduction caché derrière l'affirmation « il pleut, donc les nueages sont gris ».

V.2 Par contraposition

Définition 12.10 – Contraposée

La ______________ de la proposition $A \Rightarrow B$ est la proposition ....

Exemple 12.11 :

Soit A la proposition « il pleut » et B la proposition « les nuages sont gris ». Énoncer la contraposée de $A \Rightarrow B$.

Propriété 12.4 – Raisonnement par contraposition

....

Remarque(s) :

- Pour montrer que $A \Rightarrow B$ est vraie, on peut donc montrer que $\neg B \Rightarrow \neg A$ est vraie.

Exemple 12.12 :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que si n^2 est pair, alors n est pair.

V.3 Par l'absurde

Propriété 12.5

Si en supposant $\neg A$, on arrive à démontrer que B, alors que B est fausse, alors A est vraie.
Cela peut s'écrire :

....

Remarque(s) :

- Dit autrement, si en supposant $\neg A$, on arrive à une contradiction, alors A est vraie.
- En logique, on note $\perp$ une contradiction. On peut alors noter plus simplement le raisonnement par l'absurde :

....

Exemple 12.13 :

Démontrer par l'absurde que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.