11 Probabilités et échantillonnage

I Probabilités

I.1 Vocabulaire

Vocabulaire	Signification
Univers	Ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire.
Issue	Résultat possible
Évènement	Partie de l'univers. C'est un ensemble d'issues.
Évènement **certain**	Évènement réalisé par toutes les issues de Ω. On est sûr que cela va arriver.
Évènement **impossible**	Évènement qu'aucune des issues ne réalise. On est certain que cela ne va pas arriver.
Évènement **élémentaire**	Évènement composé d'une seule issue.
Réunion d'évènements $A \cup B$	Évènement formé par l'ensemble des issues des évènements A et B. Un élément appartient à $A \cup B$ s'il appartient à A **ou** à B.
Intersection d'évènements $A \cap B$	Évènement formé des issues qui appartiennent à A **et** à B.
Évènements **incompatibles**	Deux évènements qui n'ont pas d'issue commune : leur intersection est vide.
Évènement **contraire** $\overline{A}$	Évènement composé de toutes les issues de Ω, moins celles de A.

Propriété 11.1

Soit A un évènement d'un univers Ω associé à une expérience aléatoire.

- La probabilité de l'évènement A est notée $P(A)$.
- Quel que soit l'évènement A :

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- Si A est impossible, alors $P(A) = 0$.
- Si A est certain, alors $P(A) = 1$.

Exemple 11.1 :

On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

1. Quel est l'univers de cette expérience aléatoire ?
   $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$
2. Donner un exemple d'issue.
   1 est une issue.
3. On note A l'évènement « le résultat est un nombre pair ».
   Déterminer l'ensemble A.
   $A = \{2;4;6\}$
4. Donner un exemple d'évènement certain.
   B : « le résultat est inférieur ou égal à 6 ».
   On a alors $B = \{1;2;3;4;5;6\} = \Omega$
5. Donner un exemple d'évènement impossible.
   C : « le résultat est 0 ».
   $C = \emptyset$. On a $P(C) = 0$.
6. Soit D l'évènement élémentaire « le résultat est un 5 ».
   Déterminer l'ensemble $A \cup D$.
   $A \cup D = \{2;4;5;6\}$.
7. Soit E l'évènement élémentaire « le résultat est un 4 ».
   Déterminer l'ensemble $A \cap E$.
   $A \cap E = \{4\}$.
8. Donner un exemple de deux évènement incompatibles.
   D et E sont incompatibles car $D \cap E = \emptyset$.
9. Donner un exemple de deux évènement contraires.
   Soit I l'évènement « le résultat est impair ».
   $I = \{1;3;5\}$.
   A et I sont contraires car $I = \Omega \setminus A$.
   Autrement dit : $A \cap I = \emptyset$ et $A \cup I = \Omega$.

Définition 11.1 – Loi de probabilité

On appelle **loi de probabilité** d'une expérience aléatoire dont l'univers est $\Omega = \{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n\}$ la donnée des probabilités associées à chaque issue, soit $P(\{x_i\})$, pour tout $i \in \{1 ; 2 ; \dots ; n\}$.

Exemple 11.2 :

On lance un dé cubique truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et tel que :

- $P(\{1\}) = \frac{1}{4}$.
- $P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = \frac{1}{6}$.

Donner la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.

I.2 Calcul de probabilités

a) Généralités

Propriété 11.2

La probabilité d'un évènement A est égale à la somme des probabilités des issues qui le composent.

Propriété 11.3 – Évènement contraire

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Exemple 11.3 :

On lance un dé à six faces. On donne ci-dessous la loi de probabilité de cette expérience aléatoire :

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(\{x_i\})$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

Soit A l'évènement « le résultat est un nombre pair ».

1. Calculer $P(A)$.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{2;4;6\}) \\ &= P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

2. En déduire la probabilité de l'évènement B « le résultat est un nombre impair ».
$P(B) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

Propriété 11.4 – Réunion d'évènements

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$

Exemple 11.4 :

Dans une entreprise, 30% des employés sont des techniciens. 50% des employés font du sport entre midi et deux.
Seulement 10% des employés sont techniciens pratiquant un sport entre midi et deux.
On note les évènements suivants :

- A : « l'employé est un technicien » ;
- B : « l'employé pratique un sport entre midi et deux ».

On choisit un employé de l'entreprise au hasard.
Quelle est la probabilité que ce soit un technicien ou qu'il pratique un sport entre midi et deux ?
$P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}1$.
On cherche la probabilité de l'évènement $A \cup B$.

$$\begin{aligned} P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B) &\Leftrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &\Leftrightarrow P(A \cup B) = 0{,}3 + 0{,}5 - 0{,}1 \\ &\Leftrightarrow P(A \cup B) = 0{,}7 \end{aligned}$$

b) Situation d'équiprobabilité

Définition 11.2 – Situation d'équiprobabilité

On parle de situation d'**équiprobabilité** lorsque toutes les issues de l'expérience aléatoire ont **la même probabilité**.

Propriété 11.5

Dans une situation d'équiprobabilité à n issues, la probabilité de chaque issue est égale à $\frac{1}{n}$.
En notant $\Omega = \{x_1 \ ; \ x_2 \ ; \ \dots \ ; \ x_n\}$, on a :

$$P(x_i) = \frac{1}{n} \quad \text{pour tout } i \in \{1;2;\dots;n\}$$

Corollaire 11.6

Dans une situation d'équiprobabilité :

$$P(A) = \frac{\textbf{nb d'issues qui réalisent } A}{\textbf{nb total d'issues}}$$

Exemple 11.5 :

On tire une carte dans un jeu de 52 cartes.
Quelle est la probabilité que ce soit une figure ?
Notons A l'évènement « la carte tirée est une figure ».
Toutes les cartes ont la même probabilité d'être tirées.
Donc $P(A) = \frac{\text{nb d'issues qui réalisent } A}{\text{nb d'issues}} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$.

II Échantillonnage

Définition 11.3 – Échantillon

On appelle **échantillon de taille n** la donnée des résultats obtenus en répétant n fois la même expérience aléatoire.

Remarque(s) :

- On peut alors observer la fréquence d'un résultat dans un certain échantillon.

Propriété 11.7 – Loi des grands nombres

Lorsque n devient grand, la fréquence d'une issue dans un échantillon est proche de la probabilité de cette issue.

Théorème 11.1

Soit p la proportion théorique d'individus présentant un caractère dans une population.
Pour n suffisamment grand, la fréquence f d'individus présentant le caractère étudié dans un échantillon de taille n est telle que :

$$|f - p| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

dans environ **95 %** des cas.

Définition 11.4

- L'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est appelé **intervalle de fluctuation au seuil de 95 %**.
- L'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est appelé **intervalle de confiance au seuil de 95 %**.

Exemple 11.6 :

Lors d'un sondage sur 100 personnes, 52 indiquent vouloir voter pour Dupont.
Déterminer un intervalle de confiance au seuil de 95% de la proportion de personnes qui voteront pour Dupont.

Exemple 11.7 :

On lance un dé cubique équilibré.
On considère l'évènement S : « le résultat est un 5 ou un 6 ».
Déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence de réalisation de l'évènement S sur 400 lancers.