A Probabilités

A.1 Faire ses gammes

1 On tire une main de cinq cartes au hasard dans un jeu de 52 cartes.
Énoncer les évènements contraires des évènements :

- A : « Obtenir au moins un Roi ».
- B : « Toutes les cartes sont des coeurs ».

$\overline{A}$: « n'obtenir aucun roi ».
$\overline{B}$: « au moins une carte n'est pas un coeur ».

2 On pioche une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes et on s'intéresse à sa valeur.

1. Donner l'univers associé à cette expérience aléatoire.
2. Quelle est la probabilité de tirer un 10 ?
3. Quelle est la probabilité de tirer une figure ?

1. $\Omega = \{7;8;9;10;\text{Valet};\text{Dame};\text{Roi};\text{As}\}$.
2. Toutes les cartes ont la même probabilité d'être tirées. Il y a quatre 10 dans un jeu de cartes.
   Donc $P(\{10\}) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.
3. Soit F l'évènement : « la carte est une figure ».
   Il y a trois figures par couleur, soit 12 en tout.
   Donc $P(F) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$.

3 On lance un dé icosaédrique équilibré, dont les faces sont numérotées de 1 à 20.
On note les évènements :

- A : « on obtient un nombre pair »
- B : « on obtient un diviseur de 20 »
- C : « on obtient un multiple de 4 »

Écrire chaque évènement sous forme d'ensemble puis calculer leur probabilité.

- $A = \{2;4;6;8;10;12;14;16;18;20\}$.
  On est dans une situation d'équiprobabilité, donc : $P(A) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$.
- $B = \{1;2;4;5;10;20\}$.
  $P(B) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.
- $C = \{4;8;12;16;20\}$.
  $P(C) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.

A.2 Exercices d'entraînement

4 On lance un dé **équilibré** dont les six faces portent respectivement les numéros : 3 ; 3 ; 7 ; 8 ; 9 et 9.
On note les évènements :

- A : « le résultat est un multiple de 2 »
- B : « le résultat est un multiple de 3 »

1. Quelles sont les issues de cette expérience ?
2. Déterminer la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.
3. Énoncer les évènement $A \cup B$ et $A \cap B$ puis les écrire sous forme d'ensembles.
4. Les évènements A et B sont-ils incompatibles ? *Justifier*.
5. Sont-ils contraires ? *Justifier*.
6. On note E l'évènement « le nombre est multiple de 2 ou de 3 ». Énoncez l'évènement $\overline{E}$.

1. Cela revient à donner l'univers Ω associé à l'expérience aléatoire.
   Ici $\Omega = \{3;7;8;9\}$.
2. Chaque face a la même probabilité. On a donc :
   - $P(\{3\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
   - $P(\{7\}) = \frac{1}{6}$
   - $P(\{8\}) = \frac{1}{6}$.
   - $P(\{9\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
3. $A \cup B$: « le résultat est un multiple de 2 ou un multiple de 3 ».
   $A \cup B = \{3;8;9\}$.
   $A \cap B$: « le résultat est un multiple de 2 et un multiple de 3 ».
   $A \cap B = \emptyset$.
4. A et B sont incompatibles car $A \cap B = \emptyset$.
5. A et B ne sont pas contraires car on a bien $A \cap B = \emptyset$, mais on n'a pas $A \cup B = \Omega$.
   En effet : $A \cup B = \{3;8;9\} \neq \Omega$.
6. $\overline{E}$: « le nombre n'est ni un multiple de 2 ni un multiple de 3 ».

5 On lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6. Les probabilités d'apparition des faces sont telles que : $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = 0{,}1$. On ne donne pas $P(\{6\})$.

1. Calculer $P(\{6\})$.
2. On note :
   - A : « le numéro est un diviseur de 15 ».

- B : « le numéro n'est pas un multiple de 3 »

Les évènements A et B sont-ils incompatibles ?

3. Énoncer $A \cap B$ puis calculer $P(A \cap B)$.
4. Calculer $P(A)$ et $P(B)$.
5. Énoncer $A \cup B$ puis calculer $P(A \cup B)$.
6. Énoncer $\overline{A}$ puis calculer $P(\overline{A})$.

1. $P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) = 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}5$.
   Donc $P(\{6\}) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.
2. $A = \{1;3;5\}$.
   $B = \{1;2;4;5\}$. On en déduit $A \cap B = \{1;5\} \neq \emptyset$.
   Donc A et B ne sont pas incompatibles.
3. $A \cap B$: « le numéro est un diviseur de 15 et n'est pas un multiple de 3 ».
   $P(A \cap B) = P(\{1;5\}) = P(\{1\}) + P(\{5\}) = 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}2$.
4. $P(A) = P(\{1;3;5\}) = P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) = 3 \times 0{,}1 = 0{,}3$.
   $P(B) = P(\{1;2;4;5\}) = 4 \times 0{,}1 = 0{,}4$.
5. $A \cup B$: « le numéro est un diviseur de 15 ou le numéro n'est pas un multiple de 3 ».
   $A \cup B = \{1;2;3;4;5\}$.
   $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(\{6\}) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.
6. $\overline{A}$: « le numéro n'est pas un diviseur de 15 ».
   $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$.

6 Dans une urne, on place huit jetons sur lesquels sont inscrites les lettres du mot « ECOLOGIE ».
On pioche un jeton au hasard.
On considère les évènements suivants :

- A : « on obtient une voyelle » ;
- B : « on obtient une lettre du mot PROPRE » ;
- C : « on obtient une lettre du mot VOYAGE » ;
- D : « on obtient une lettre du mot BRUN »

Écrire chaque évènement sous forme d'un ensemble des issues possibles et calculer leur probabilité.

Chaque jeton a la même probabilité d'être tiré.
On en déduit :

x_i	E	C	O	L	G	I
$P(\{x_i\})$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

- $A = \{E;I;O\}$.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{E\}) + P(\{I\}) + P(\{O\} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

- $B = \{O;E\}$.

$$\begin{aligned} P(B) &= P(\{O\}) + P(\{E\}) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- $C = \{O;G;E\}$.

$$\begin{aligned} P(C) &= P(\{O\}) + P(\{G\}) + P(\{E\}) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

- $D = \emptyset$. On a donc directement $P(D) = 0$.

7 On lance deux dés équilibrés, l'un rouge et l'autre noir. On s'intéresse à la somme des nombres obtenus apparus sur les faces de dessus.

- Le dé rouge porte les numéros 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 et 4.
- Le dé noir porte les numéros 2 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 5.

Dans le tableau à double entrée suivant, indiquez la somme obtenue.

	1	1	2	3	4	4
2	3	3	4	5	6	6
2	3	3	4	5	6	6
3	4	4	5	6	7	7
4	5	5	6	7	8	8
5	6	6	7	8	9	9
5	6	6	7	8	9	9

1. Combien y a-t-il d'issues ? Sont-elle équiprobables ? *Justifier*.
2. Déterminer la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.
3. Sur quelle somme vaudrait-il mieux parier ?
4. Quelle est la probabilité que la somme soit supérieure ou égale à 6 ?

1. Il y a sept issues : $\Omega = \{3;4;5;6;7;8;9\}$.
   Elles ne sont pas équiprobables. En effet chaque lancer différent (chaque case du tableau) est équiprobable (il y en a 36), et on peut donc en déduire que plus un résultat apparaît dans le tableau, plus la probabilité de l'issue associée est élevée.
2. $P(\{3\}) = \frac{4}{36}$ car 3 est obtenu de 4 par quatre lancers différents.
   Donc $P(\{3\}) = \frac{1}{9}$. Par un raisonnement analogue, on obtient le tableau suivant :

x_i	3	4	5	6	7	8	9
$P(\{x_i\})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

3. L'évènement élémentaire ayant la probabilité la plus élevée est $\{6\}$. Il vaut mieux parier sur la somme 6.
4. Soit A l'évènement : « la somme est supérieure ou égale à 6 ».

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{6;7;8;9\}) \\ &= P(\{6\}) + P(\{7\}) + P(\{8\}) + P(\{9\}) \\ &= \frac{5}{13} + \frac{5}{36} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \\ &= \boxed{\frac{23}{36}} \end{aligned}$$

8 Dans un restaurant, sur 170 clients servis, 100 on pris une entrée et un plat, 110 ont pris un plat et un dessert. Parmi ces derniers, 80 ont pris l'entrée, le plat et le dessert. Certains n'ont pris qu'un plat sans entrée ni dessert.
On choisit au hasard une personne qui a mangé dans ce restaurant et on considère les évènements :

- A : « le client a pris une entrée »
- B : « le client a pris un dessert »

1. Déterminer $P(A)$, $P(B)$.
2. Décrire $A \cap B$ puis calculer $P(A \cap B)$.
3. Décrire $A \cup B$ puis calculer $P(A \cup B)$.
4. En déduire la probabilité qu'un client ait pris un plat seul.

1. $P(A) = \frac{100}{170} = \frac{10}{17}$ et $P(B) = \frac{110}{170} = \frac{11}{17}$.
2. $A \cap B$: « le client a pris une entrée **et** un dessert ». $P(A \cap B) = \frac{80}{170} = \frac{8}{17}$.
3. $A \cup B$: « le client a pris une entrée **ou** un dessert ».
   $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$, donc $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
   D'où : $P(A \cup B) = \frac{10}{17} + \frac{11}{17} - \frac{8}{17} = \frac{13}{17}$.
4. « le client a pris un plat seul » est l'évènement $\overline{A \cup B}$.
   Or : $P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{13}{17} = \frac{4}{17}$.

9 Une usine fabrique des objets destinés à être commercialisés.
Sur 100 objets qui sortent de l'usine, en moyenne, 15 ont le défaut A, 7 ont le défaut B et 6 ont les deux défauts.
Calculer la probabilité qu'un objet n'ait aucun défaut.

Soient les évènements suivants :

- A : « l'objet a le défaut A ».
- B : « l'objet a le défaut B ».

D'après l'énoncé : $P(A) = \frac{15}{100}$, $P(B) = \frac{7}{100}$, $P(A \cap B) = \frac{6}{100}$.
« l'objet n'a aucun défaut » est l'évènement $\overline{A \cup B}$.
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{15}{100} + \frac{7}{100} - \frac{6}{100} = \frac{16}{100}$.
Donc $P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{16}{100} = \frac{84}{100} = \boxed{\frac{21}{25}}$.

A.3 Exercices d'approfondissement

10 On lance deux dés cubiques équilibrés numérotés de 1 à 6 et on s'intéresse à la somme obtenue.
Déterminer la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.

On peut résumer l'ensemble des lancers à l'aide du tableau à double entrée ci-dessous, dans lequel toutes les cases ont probabilité identique (situation d'équiprobabilité) :

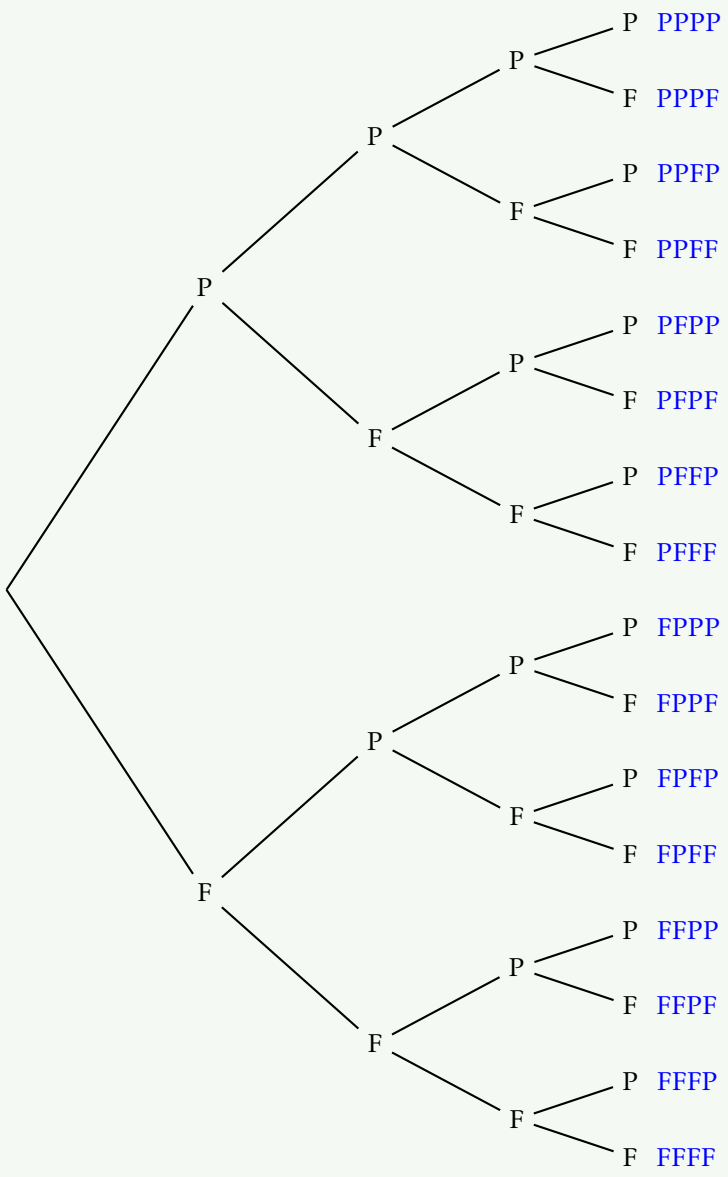
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

L'ensemble des issues est $\Omega = \{2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12\}$.
La loi de probabilité de cette expérience aléatoire est :

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(\{x_i\})$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

11 On lance 4 fois d'affilée une pièce équilibrée.
Sur quel nombre d'apparitions de « pile » vaut-il mieux parier ? *Justifier*.

On peut déterminer les arrangements possibles en dressant un arbre de dénombrement :



L'univers de cette expérience aléatoire est l'ensemble $\Omega = \{0;1;2;3;4\}$.
Grâce à l'abre ci-dessus, on peut déterminer la loi de probabilité de cette expérience aléatoire :

x_i	0	1	2	3	4
$P(\{x_i\})$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

NB : on pense à vérifier que la somme des probabilités des issues de l'expérience aléatoire est égale à 1.
On déduit de la loi de probabilité qu'il vaut mieux parier sur deux apparitions de « pile ».

B Échantillonnage

B.1 Faire ses gammes

12 Pour chacune des situations ci-dessous, donner deux exemples d'échantillons de taille 5.

1. On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes et on s'intéresse à la valeur de la carte tirée.
2. On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on regarde le résultat obtenu.

1. 7 ; Roi ; Roi ; As ; As.
2. 1 ; 2 ; 5 ; 5 ; 5.

13 Un sac contient 70 % de jetons verts.
On effectue 50 tirages avec remise et on note f la fréquence des jetons verts tirés.
Au seuil de 95%, à quel intervalle devrait appartenir f ?

On déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95%. La proportion de jetons verts est égale à 0,7, et l'échantillon est de taille 50.
$0{,}7 - \frac{1}{\sqrt{50}} \approx 0{,}5586$.
$0{,}7 + \frac{1}{\sqrt{50}} \approx 0{,}8414$.
Donc $[0{,}5586;0{,}8414]$ est l'intervalle de fluctuation au seuil de 95%.
NB : $0{,}5586 \times 50 = 27{,}93$ et $0{,}8414 \times 50 = 42{,}07$.
Donc on peut s'attendre à ce qu'il y ait entre 27 et 43 jetons verts dans l'échantillon.
On arrondit 27,93 à l'entier inférieur et 42,07 à l'entier supérieur pour garder un seuil de confiance supérieur à 95%.

14 Une urne contient des jetons verts et des jetons bleus.
On souhaite connaître la proportion de jetons verts.

On effectue 50 tirages avec remise dans cette urne. On obtient 14 jetons verts.
Estimer la proportion de jetons verts à l'aide d'un intervalle de confiance au seuil de 0,95%.

La fréquence de jetons verts sur cette échantillon de taille 50 est : $f = \frac{14}{50} = 0{,}28$.
$0{,}28 - \frac{1}{\sqrt{50}} \approx 0{,}1386$.
$0{,}28 + \frac{1}{\sqrt{50}} \approx 0{,}4214$.
La proportion de jetons verts appartient donc à l'intervalle $[0{,}1386; 0{,}4214]$, au seuil de confiance de 95%.

B.2 Exercices d'entraînement

15 Dans une chaine de production, on a prélevé 38 produits, et on a relevé 8 produits présentant un défaut.

1. Quelle est la proportion de produit présentant un défaut ?
2. Le responsable de la fabrication affirme que moins de 21% des produits présentent un défaut. Qu'en pensez-vous ?

1. On calcule la fréquence de produits présentant un défaut : $f = \frac{8}{38} \approx 0{,}2105$.
   $0{,}2105 - \frac{1}{\sqrt{38}} \approx 0{,}0483$.
   $0{,}2105 + \frac{1}{\sqrt{38}} \approx 0{,}3727$.
   On en déduit l'intervalle de confiance au seuil de 95% : $[0{,}0483; 0{,}3727]$.
2. 21% appartient bien à l'intervalle de confiance établi dans la question précédente, mais la proportion peut être plus importante. Le responsable cherche donc à embellir la situation.

16 Avant une élection, un candidat souhaite savoir s'il obtiendra la majorité, soit plus de 50% des voix, dès le premier tour.
Il organise alors un sondage sur un échantillon représentatif composé de 1000 votants.
Sur les 1000 personne interrogées, 821 annoncent vouloir voter pour lui.
Que peut-il en déduire ?

La fréquence de personnes votant pour le candidat est $f = 0{,}821$.
$0{,}821 - \frac{1}{\sqrt{1000}} \approx 0{,}7894$.
$0{,}821 + \frac{1}{\sqrt{1000}} \approx 0{,}8526$.
L'intervalle de confiance au seuil de 95% est $\boxed{[0{,}7894; 0{,}8526]}$.
Il peut donc en déduire qu'il sera élu.

17 On souhaite estimer le nombre de gauchers dans une population.
Quelle doit être la taille minimale de l'échantillon pour obtenir un résultat avec une précision de 1%, au seuil de 95% ?

Pour que l'intervalle de confiance ait une amplitude inférieure à 0,01, il faut que $\frac{1}{\sqrt{n}}$ soit inférieur à 0,005.
La fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
Donc :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0{,}005 \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq \frac{1}{0{,}005}$$

La fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc :

$$\sqrt{n} \geq \frac{1}{0{,}005} \Leftrightarrow n \geq \left(\frac{1}{0{,}005}\right)^2$$

Or $\left(\frac{1}{0{,}005}\right)^2 = 40\,000$.
Pour obtenir une précision de 1%, il faut donc un échantillon de taille supérieur ou égale à $\boxed{40\,000}$.