9 Fonctions de référence

Rappel

1. On appelle **ensemble de définition** de f l'ensemble de toutes les valeurs x telles que $f(x)$ existe.
   On note cet ensemble $\mathcal{D}_f$.
2. La courbe représentative de f, notée $\mathcal{C}_f$, est l'ensemble des points M de coordonnées $\left(x; f(x)\right)$.
3. On dit que f est croissante (resp. décroissante) sur un intervalle I si pour tous réels a et b de I : $a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$ (resp. $f(a) \geq f(b)$).
4. (a) f est paire si et seulement si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$: $f(-x) = f(x)$.
   (b) f est impaire si et seulement si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$: $f(-x) = -f(x)$.

I Fonctions carré et racine carrée

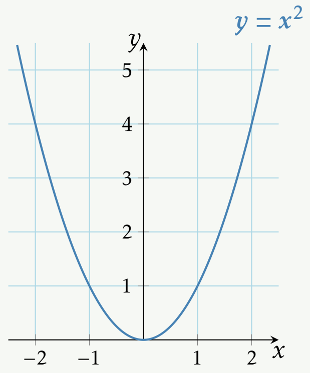
I.1 Fonction carré

Définition 9.1

La fonction carré est la fonction :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \longmapsto x^2.$$

Sa courbe représentative est une **parabole**.



Propriété 9.1 – Variations et parité

- La fonction carré est **décroissante sur** $\mathbb{R}^-$ et **croissante sur** $\mathbb{R}^+$.
- La fonction carré est **paire**.

Exemple 9.1 :

1. Dresser le tableau de variations de la fonction carré.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↗

2. Sans calculatrice, comparer les nombres suivants :
   (a) $1{,}12^2$; $1{,}13^2$ (b) $(-2{,}31)^2$; $(-2)^2$
   (c) $(-4)^2$; 4^2

   (a) La fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
   Donc $1{,}12 < 1{,}13 \Rightarrow 1{,}12^2 < 1{,}13^2$.
   (b) La fonction carré est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$.
   Donc $-2{,}31 < -2 \Rightarrow (-2{,}31)^2 > (-2^2)$.
   (c) $(-4)^2 = 4^2$

I.2 Fonction racine carrée

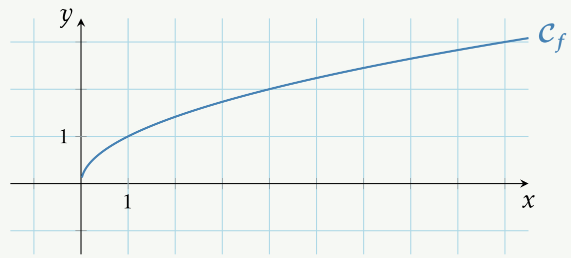
Rappel La racine carrée d'un nombre x, notée $\sqrt{x}$, est le nombre **positif** qui élevé au carré vaut x.
Autrement dit : $\sqrt{x} \times \sqrt{x} = x$.
Par exemple : $\sqrt{9} = 3$ car $3 \times 3 = 9$.
On peut écrire :

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow a = b^2 \quad \text{avec} \quad a,b \in \mathbb{R}^+$$

Définition 9.2 – Fonction racine carrée

La fonction racine carrée est la fonction :

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \longmapsto \sqrt{x}.$$



Propriété 9.2 – Règles de calcul

- Pour tous réels positifs a et b : $\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$
- Pour tous réels positifs a et b avec $b\neq 0$: $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Exemple 9.2 :

1. Dresser le tableau de variations de la fonction racine carrée.

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	0 $\nearrow$

2. Soit $f: x\mapsto\sqrt{x}$. Calculer $f(0)$, $f(4)$, $f(9)$, $f(-4)$.
   $f(0)=\sqrt{0}=0$.
   $f(4)=\sqrt{4}=2$.
   $f(9)=\sqrt{9}=3$.
   $f(-4)=\sqrt{-4}$ ⚠ IMPOSSIBLE. La racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas.
3. Soit $g: x\mapsto\sqrt{x-3}$. Quel est le domaine de définition de g ?
   $x\mapsto\sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$.
   $x-3\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 3$.
   Donc g est définie sur $[3;+\infty[$.
4. Simplifier $\sqrt{\frac{75}{4}}$.
   $\sqrt{\frac{75}{4}}=\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{25\times 3}}{2}=\frac{\sqrt{25}\times\sqrt{3}}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

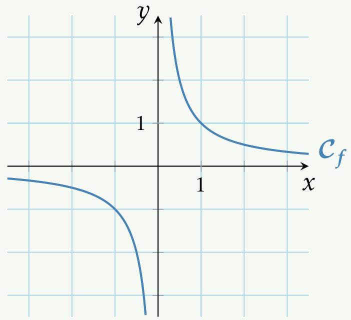
II Fonctions inverse

Définition 9.3

La fonction inverse est la fonction :

$$f:\mathbb{R}^*\longrightarrow\mathbb{R}^*$$
$$x\longmapsto\frac{1}{x}.$$

Sa courbe représentative est une **hyperbole**.



Propriété 9.3 – Variations et parité

- Variations : la fonction inverse est **décroissante** sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.
- Parité : la fonction inverse est **impaire**.

⚠ On ne peut pas dire que la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^*$.
En effet, $-2<2$, mais on n'a pas $-\frac{1}{2}>\frac{1}{2}$!

Exemple 9.3 :

1. Dresser le tableau de variations de la fonction inverse.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	‖	$\searrow$

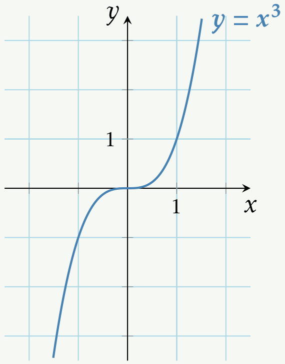
2. Sans calculatrice, comparer les nombres suivants :
   (a) $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{7}$ (b) $-\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}$ (c) $-\frac{1}{5}$; $-\frac{1}{6}$
   (a) La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.
   Donc $4<7\Rightarrow\frac{1}{4}>\frac{1}{7}$.
   (b) $-\frac{1}{4}<0$ et $\frac{1}{3}>0$, donc $-\frac{1}{4}<\frac{1}{3}$.
   (c) La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$.
   Donc $-6<-5\Rightarrow-\frac{1}{6}>-\frac{1}{5}$.

III Fonction cube

Définition 9.4

La fonction cube est la fonction :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \boldsymbol{x^3}.$$



Propriété 9.4 – Variations et parité

- Variations : la fonction cube est strictement **croissante** sur $\mathbb{R}$.
- Parité : la fonction cube est **impaire**.

Exemple 9.4 :

1. Dresser le tableau de variations de la fonctions cube.

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$

2. Sans calculatrice, ranger les valeurs suivantes dans l'ordre croissant : $(-3)^3$; $1{,}2^3$; $\left(\frac{5}{2}\right)^3$.
La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc :

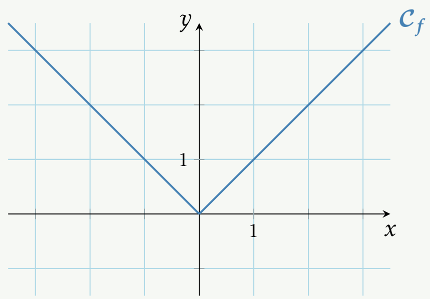
$$-3 < 1{,}2 < \frac{5}{2} \Rightarrow \boxed{(-3)^3 < 1{,}2^3 < \left(\frac{5}{2}\right)^3}$$

IV Fonction valeur absolue

Définition 9.5 – Valeur absolue

La fonction valeur absolue est la fonction :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \longmapsto |\boldsymbol{x}| = \begin{cases} \boldsymbol{x} & \text{si} \quad \boldsymbol{x \geq 0} \\ \boldsymbol{-x} & \text{si} \quad \boldsymbol{x < 0} \end{cases}.$$



Remarque(s) :

- Puisque $|x| = -x$ si $x < 0$, une valeur absolue est toujours positive.
- On peut interpréter $|x|$ comme la distance entre x et 0.
- On peut interpréter $|a-b|$ comme la distance entre les deux réels a et b.

Exemple 9.5 :

1. Déterminer $|-5|$ et $|3|$.
$|-5| = 5$ et $|3| = 3$.
2. Que représente géométriquement $|1-7|$? $|2-(-1)|$?
$|1-7|$ est la distance entre 1 et 7. $|1-7| = |-6| = 6$.
$|2-(-1)|$ est la distance entre 2 et -1. $|2-(-1)| = |3| = 3$.
3. Quel est l'ensemble des valeurs x vérifiant $|x-1| \geq 3$?
$|x-1|$ représente la distance entre x et 1.
Les valeurs de x dont la distance à 1 est supérieure ou égale à 3 sont les nombres appartenant à l'ensemble $]-\infty;-2] \cup [4;+\infty[$.
4. Quel est l'ensemble des valeurs x vérifiant $|x+3| \leq 2$?
$|x+3| = |x-(-3)|$.
On cherche donc les valeurs de x dont la distance à -3 est inférieure ou égale à 2.
On a $x \in [-5;-1]$.