8 Représentations des droites du plan

Rappel

- Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$.

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = \boldsymbol{xy' - x'y}$$

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$.
- Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$.

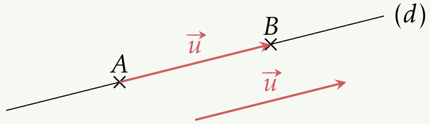
$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

I Généralités sur les droites

I.1 Vecteurs directeurs d'une droite

Définition 8.1 – Vecteur directeur

On appelle **vecteur directeur** d'une droite (d) tout vecteur $\vec{u}$ dont (d) est la direction ; c'est à dire qu'il existe deux points distincts A et B de (d) tels que $\boldsymbol{\vec{u} = \overrightarrow{AB}}$.

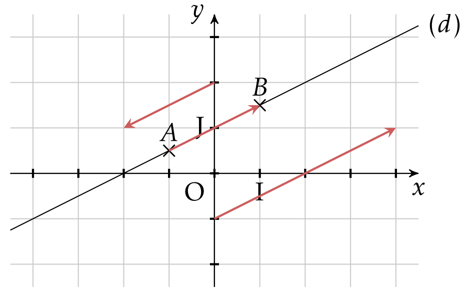


Remarque(s) :

- Une droite possède une infinité de vecteurs directeurs.

Exemple 8.1 :

Sur la figure ci-dessous, tracer trois vecteurs directeurs de la droite (d).



Exemple 8.2 :

Soient $A(-1;3)$, $B(4;2)$ et $\vec{u}(12{,}5;-2{,}5)$.
$\vec{u}$ est-il un vecteur directeur de (AB) ?
$\vec{u}$ est un vecteur directeur de (AB) si sa direction est (AB), autrement dit, si $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
$\overrightarrow{AB} = (4-(-1);2-3) = (5;-1)$.

$$\begin{aligned}\det(\vec{u};\overrightarrow{AB}) &= 12{,}5 \times (-1) - 5 \times (-2{,}5)\\ &= 0\end{aligned}$$

Donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
Donc $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (AB).

I.2 Parallélisme

Propriété 8.1 – Vecteurs directeurs et parallélisme

Soient (d) et (d') deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$.
(d) et (d') sont parallèles si et seulement si $\boldsymbol{\det(\vec{u};\vec{u'}) = 0}$.

Exemple 8.3 :

Soient les points $A(2;-3)$, $B(5;3)$, $C(1;4)$ et $D(-1;0)$.
Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?
Les droites (AB) et (CD) ont respectivement pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
On a $\overrightarrow{AB}(3;6)$ et $\overrightarrow{CD}(-2;-4)$.

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) &= 3 \times (-4) - (-2) \times 6\\ &= 0\end{aligned}$$

$\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) = 0$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

On en déduit que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Exercices : A

II Équations de droites

II.1 Équations cartésiennes d'une droite

Définition 8.2 – Équation cartésienne d'une droite

Soit (d) une droite du plan.
Il existe trois réels a, b et c tels que l'ensemble des points $M(x;y)$ de (d) vérifient la relation :

$$\boldsymbol{ax+by+c=0}$$

Cette relation est appelée **équation cartésienne** de la droite (d).

Propriété 8.2 – Équation cartésienne et vecteur directeur

- Si (d) a pour équation cartésienne $ax+by+c=0$ alors le vecteur $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).
- Réciproquement, si $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d), alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $ax+by+c=0$ est une équation cartésienne de (d).

Démonstration

Démontrons le premier points de la propriété :
Soit (d) une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$, et soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points de (d).
Les coordonnées de A et B vérifient l'équation de (d), donc on a :

- $ax_A+b_yA+c=0$
- $ax_B+by_B+c=0$

On a, en soustrayant membre à membre les deux équations :

$$ax_A+by_A+c-ax_B-by_B-c=0$$

soit :

$$a(x_A-x_B)+b(y_A-y_B)=0$$

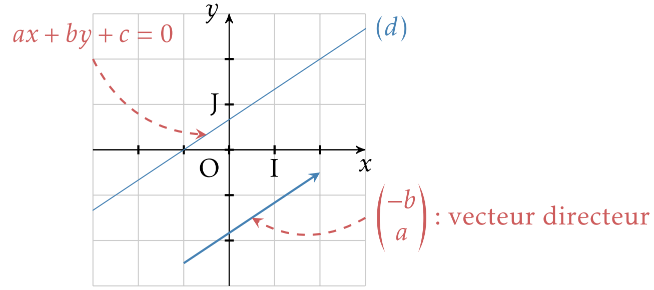
Or :

$$a(x_A-x_B)+b(y_A-y_B)=-b(y_B-y_A)-a(x_B-x_A)$$

$$=\det(\vec{u},\overrightarrow{AB})$$

avec $\vec{u}(-b,a)$.
On a donc $\det(\vec{u},\overrightarrow{AB})=0$.
Donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
Donc $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (AB). □

Illustration



Remarque(s) :

- Pour toute droite, il existe une infinité d'équations cartésiennes.

Exemple 8.4 :

Soit (d) une droite dont $-2x+4y-1=0$ est une équation cartésienne. Donner un vecteur directeur de (d).
On a l'équation cartésienne $ax+by+c=0$ avec $a=-2$, $b=4$ et $c=-1$.
$(-b;a)=(-4;-2)$, donc $\vec{u}(-4;-2)$ est un vecteur directeur de (d).

Exemple 8.5 :

Soient $A(4;6)$ et $B(-1;2)$.
Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
On commence par déterminer un vecteur directeur de (AB) afin de trouver les coefficients a et b.
$\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (AB).
$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A)=(-1-4;2-6)=(-5;-4)$.
On a $\overrightarrow{AB}=(-b;a)$ avec $a=-4$ et $b=5$.
On en déduit qu'une équation cartésienne de (AB) est $-4x+5y+c=0$, avec $c\in\mathbb{R}$.
$A\in(AB)$, donc ses coordonnées vérifient l'équation.

$$\begin{aligned}-4\times x_A+5\times y_A+c=0 &\Leftrightarrow -4\times 4+5\times 6+c=0\\ &\Leftrightarrow 14+c=0\\ &\Leftrightarrow c=-14\end{aligned}$$

Donc une équation cartsésienne de (AB) est $-4x+5y-14=0$.

Exercices : B

II.2 Équation réduite d'une droite

Propriété 8.3

Toute droite (d) d'équation $ax+by+c=0$ avec $b\neq 0$ possède un vecteur directeur de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ où $m=-\frac{a}{b}$.

DÉMONSTRATION

Soit (d) une droite d'équation $ax+by+c=0$, avec $b\neq 0$.
Le vecteur $\vec{u}(-b;a)$ est un vecteur directeur de (d).
Donc $-\frac{1}{b}\times\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de (d).
Or :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{b}\times\vec{u} &= -\frac{1}{b}\times(-b;a)\\ &= \left(-\frac{1}{b}\times(-b);-\frac{1}{b}\times a\right)\\ &= \left(1;-\frac{a}{b}\right)\end{aligned}$$

□

Définition 8.3 – Coefficient directeur

Le nombre m de la propriété précédente s'appelle **coefficient directeur** de la droite (d).

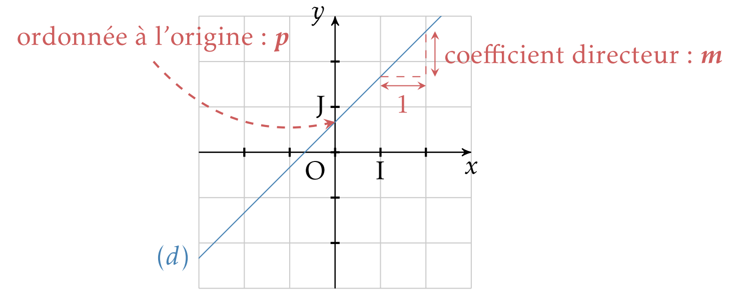
Propriété 8.4

Soit (d) une droite de coefficient directeur m.
Il existe un nombre p tel que l'équation de (d) s'écrive $\boldsymbol{y=mx+p}$

Définition 8.4 – Équation réduite d'une droite

L'équation $y=mx+p$ s'appelle **équation réduite** de (d).
p est l'**ordonnée à l'origine** de la droite (d).

Illustration



Remarque(s) :

- L'ordonnée à l'origine est l'ordonnée du point d'intersection de (d) avec l'axe des ordonnées. Il s'agit du point de (d) ayant pour abscisse 0, d'où le terme.

Exemple 8.6 :

Soit (d) la droite dont on donne une équation cartésienne : $3x-4y+2=0$.

1. Déterminer le coefficient directeur de (d).
   La droite (d) a pour équation $ax+by+c=0$ avec $a=3$, $b=-4$ et $c=2$.
   La droite (d) a pour coefficient directeur $-\frac{a}{b}$, soit $-\frac{3}{-4}=\frac{3}{4}$.
2. Déterminer l'ordonnée à l'origine de la droite (d).
   Pour déterminer l'ordonnée à l'origine d'une droite, il suffit de remplacer x par 0 dans une équation de celle-ci. L'ordonnée obtenue est l'ordonnée à l'origine.
   Ici, en remplaçant x par 0 dans l'équation de (d), on obtient : $-4y+2=0$.
   $$\begin{aligned}-4y+2=0 &\Leftrightarrow -4y=-2\\ &\Leftrightarrow y=\frac{-2}{-4}\\ &\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}\end{aligned}$$
   Donc $p=\frac{1}{2}$.
3. En déduire l'équation réduite de (d).
   (d) a pour coefficient directeur $\frac{3}{4}$ et pour ordonnée à l'origine $\frac{1}{2}$, donc son équation réduite est :
   $$y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$$
   Cette équation est unique.

Propriété 8.5 – Calcul du coefficient directeur

Le coefficient directeur d'une droite (AB) non parallèle à l'axe des ordonnées est égal à :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Exemple 8.7 :

Soient $A(3;9)$ et $B(-4;-5)$.

1. Déterminer le coefficient directeur de (AB).

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \\ &= \frac{-5-9}{-4-3} \\ &= 2 \end{aligned}$$

2. En déduire l'équation réduite de (AB).
   $m = 2$, donc l'équation réduite de (AB) est de la forme $y = 2x + p$.
   $A \in (AB)$, donc ses coordonnées vérifient l'équation de (AB).

$$\begin{aligned} y_A = 2 \times x_A + p &\Leftrightarrow 9 = 2 \times 3 + p \\ &\Leftrightarrow 9 = 6 + p \\ &\Leftrightarrow 3 = p \end{aligned}$$

   Donc l'équation réduite de (AB) est $y = 2x + 3$.

Exercices : C

III Position relative de droites

III.1 Droites sécantes

Théorème 8.1

Soient d et d' deux droites d'équations respectives $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c=0$.
d et d' sont sécantes si et seulement si $\boldsymbol{ab' - a'b \neq 0}$.

Démonstration

d et d' ont pour vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}(-b;a)$ et $\vec{u'}(-b';a')$.

d et d' sont sécantes si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ ne sont pas colinéaires.

$$\begin{aligned} \det(\vec{u},\vec{u'}) \neq 0 &\Leftrightarrow -b \times a' - (-b') \times a \neq 0 \\ &\Leftrightarrow ab' - a'b \neq 0 \end{aligned}$$

□

Propriété 8.6 – Coordonnées du point d'intersection

Si d et d' sont sécantes, alors les coordonnées du point d'intersection $M(x;y)$ sont solutions du système :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Exemple 8.8 :

Soient d et d' deux droites d'équations respectives $x+4y-11=0$ et $-3x+4y+1=0$.

1. Les droites d et d' sont-elles sécantes ?

$$\begin{aligned} ab' - a'b &= 1 \times 4 - (-3) \times 4 \\ &= 4 + 12 \\ &= 16 \end{aligned}$$

   $ab' - a'b \neq 0$ donc d et d' sont sécantes.

2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de d et d'.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 4y - 11 = 0 \\ -3x + 4y + 1 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 - 4y \\ -3(11-4y) + 4y + 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 - 4y \\ -33 + 12y + 4y + 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 - 4y \\ 16y = 32 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 - 4 \times 2 \\ y = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

   Donc le point d'intersection de d et d' a pour coordonnées $(3;2)$.

III.2 Droites parallèles/confondues

Propriété 8.7

Soient d et d' deux droites parallèles et M un point quelconque de d.
d et d' sont confondues si et seulement si **M appartient à d'**.

Exemple 8.9 :

Soient d et d' deux droites d'équations $-3x+4y-6=0$ et $-3x+4y+17=0$.

1. Les droites d et d' sont-elles sécantes ?

$$\begin{aligned} ab'-a'b &= -3\times 4-(-3)\times 4 \\ &= -12+12 \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Donc d et d' ne sont pas sécantes, elles sont parallèles.

2. Les droites d et d' sont-elles confondues ?
   Cherchons un point de d.
   En remplaçant x par 0 :

$$\begin{aligned} -3\times 0+4y-6=0 &\Leftrightarrow 4y=6 \\ &\Leftrightarrow y=\frac{3}{2} \end{aligned}$$

   Donc le point $M(0;\frac{3}{2})$ appartient à d.
   Si on injecte les coordonnées de M dans l'équation de d', on trouve :

$$\begin{aligned} -3\times 0+4\times\frac{3}{2}+17 &= 0+6+17 \\ &= 23 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

   Donc les coordonnées du point M ne vérifient pas l'équation de d', donc $M\notin d'$.
   Donc les droites d et d' ne sont pas confondues.
   Elles sont donc parallèles et disjointes.

Exercices : D