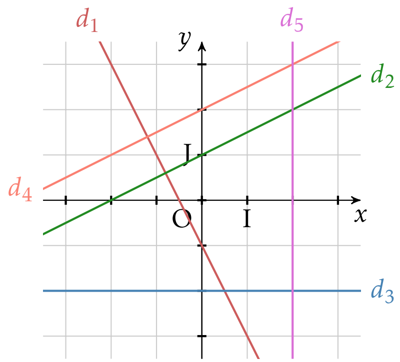
A Vecteur directeur

1 Déterminer graphiquement un vecteur directeur d'une droite

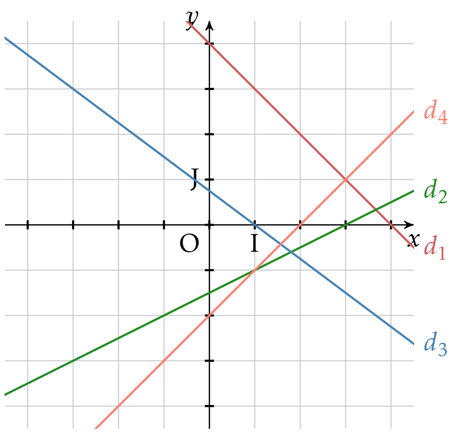
Pour chacune des droites tracées ci-dessous, déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur.



Un vecteur directeur de d_1 est $\vec{u_1}(1;-2)$.
Un vecteur directeur de d_2 est $\vec{u_2}(2;1)$.
Un vecteur directeur de d_3 est $\vec{u_3}(1;0)$.
Un vecteur directeur de d_4 est $\vec{u_4}(2;1)$.
Un vecteur directeur de d_5 est $\vec{u_5}(0;1)$.

2 Tracer une droite, connaissant un vecteur directeur

Dans chacun des cas, tracer la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.



1. $d_1 : A(1;3)$ et $\vec{u}(1;-1)$.
2. $d_2 : A(-1;-2)$ et $\vec{u}(2;1)$.
3. $d_3 : A(-3;3)$ et $\vec{u}(4;-3)$.
4. $d_4 : A(0;-2)$ et $\vec{u}(1;1)$.

3 Vecteur directeur ?

Dans chacun des cas, dire si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (AB).

1. $A(2;3)$, $B(4;3)$ et $\vec{u}(5;0)$.

$\overrightarrow{AB} = (4-2;3-3) = (2;0)$.

$$\begin{aligned}\det(\vec{u};\overrightarrow{AB}) &= 5\times 0 - 2\times 0\\ &= 0\end{aligned}$$

$\det(\vec{u},\overrightarrow{AB}) = 0$ donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
Donc $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (AB).

2. $A(2;9)$, $B(-4;2)$ et $\vec{u}(-11;-14)$.

$\overrightarrow{AB} = (-4-2;2-9) = (-6;-7)$.

$$\begin{aligned}\det(\vec{u};\overrightarrow{AB}) &= -11\times(-7) - (-6)\times(-14)\\ &= -7\end{aligned}$$

$\det(\vec{u},\overrightarrow{AB}) \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires.
Donc $\vec{u}$ n'est pas un vecteur directeur de (AB).

3. $A(1;2)$, $B(-5;3)$ et $\vec{u}(18;-2)$.

$\overrightarrow{AB} = (-5-1;3-2) = (-6;1)$.

$$\begin{aligned}\det(\vec{u};\overrightarrow{AB}) &= 18\times 1 - (-6)\times(-2)\\ &= 6\end{aligned}$$

$\det(\vec{u},\overrightarrow{AB}) \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires.
Donc $\vec{u}$ n'est pas un vecteur directeur de (AB).

4. $A(4;-2)$, $B(1;3)$ et $\vec{u}(-6;10)$.

$\overrightarrow{AB} = (1-4;3-(-2)) = (-3;5)$.

$$\begin{aligned}\det(\vec{u};\overrightarrow{AB}) &= -6\times 5 - (-3)\times 10\\ &= 0\end{aligned}$$

$\det(\vec{u},\overrightarrow{AB}) = 0$ donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
Donc $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (AB).

B Équations cartésiennes d'une droite

4 Appartenance à une droite

Dans chacun des cas, dire si le point A appartient à la droite (d).

1. $(d) : 2x + 2y - 4 = 0$ et $A(0;2)$.

$$\begin{aligned} 2x_A + 2y_A - 4 &= 2 \times 0 + 2 \times 2 - 4 \\ &= 0 + 4 - 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Les coordonnées du point A vérifient l'équation cartésienne de (d), donc $A \in (d)$.

2. $(d) : 7x - 4y + 3 = 0$ et $A(3;4)$.

$$\begin{aligned} 7x_A - 4y_A + 3 &= 7 \times 3 - 4 \times 4 + 3 \\ &= 21 - 16 + 3 \\ &= 8 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Les coordonnées du point A ne vérifient pas l'équation cartésienne de (d), donc $A \notin (d)$.

3. $(d) : -3x + 2y - 1 = 0$ et $A(2;\frac{7}{2})$.

$$\begin{aligned} -3x_A + 2y_A - 1 &= -3 \times 2 + 2 \times \frac{7}{2} - 1 \\ &= -6 + 7 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Les coordonnées du point A vérifient l'équation cartésienne de (d), donc $A \in (d)$.

4. $(d) : 5x + 2y - 6 = 0$ et $A(-1;\frac{13}{2})$.

$$\begin{aligned} 5x_A + 2y_A - 6 &= 5 \times (-1) + 2 \times \frac{13}{2} - 6 \\ &= -5 + 13 - 6 \\ &= 2 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Les coordonnées du point A ne vérifient pas l'équation cartésienne de (d), donc $A \notin (d)$.

5 Droite à partir d'une équation cartésienne

Soit (d) la droite d'équation cartésienne $2x + 2y - 4 = 0$.

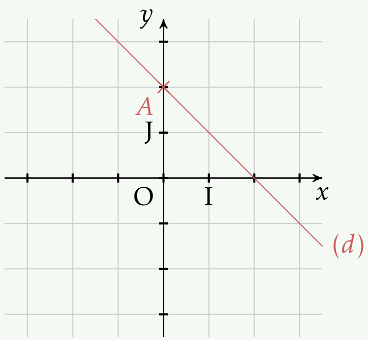
1. Déterminer un vecteur directeur de (d).
2. Déterminer les coordonnées d'un point appartenant à (d).
3. Tracer la droite (d) dans un repère orthonormé.

1. (d) a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $a = 2$, $b = 2$ et $c = -4$. On en déduit que le vecteur $\vec{u}(-b;a)$, soit $\vec{u}(-2;2)$ est un vecteur directeur de (d).
2. Si on remplace x par 0 dans l'équation cartsésienne, on a :

$$\begin{aligned} 0 + 2y - 4 = 0 &\Leftrightarrow 2y = 4 \\ &\Leftrightarrow y = 2 \end{aligned}$$

On en déduit que le point $A(0;2)$ appartient à (d).

3.



6

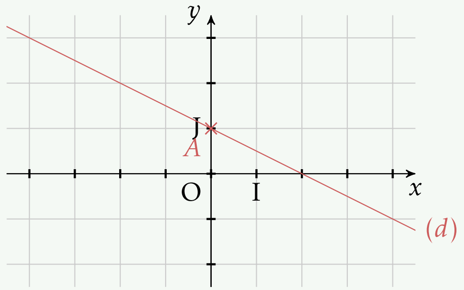
Soit (d) la droite d'équation cartésienne $2x + 4y - 4 = 0$.
Tracer la droite (d) dans un repère orthonormé.

(d) a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $a = 2$, $b = 4$ et $c = -4$.
On en déduit que le vecteur $\vec{u}(-b;a)$, soit $\vec{u}(-4;2)$ est un vecteur directeur de (d).
Si on remplace x par 0 dans l'équation cartsésienne, on a :

$$0 + 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow 4y = 4$$

$$\Leftrightarrow y = 1$$

On en déduit que le point $A(0;1)$ appartient à (d).



7 Déterminer une équation cartésienne

Dans chacun des cas, déterminer une équation cartésienne de la droite (d) passant par A et de coefficient directeur $\vec{u}$.

1. $A(1;2)$ et $\vec{u}(3;4)$.

$\vec{u} = (-b;a)$ avec $a = 4$ et $b = -3$.
Donc une équation cartésienne de (d) est $4x - 3y + c = 0$, avec $c \in \mathbb{R}$.
$A \in (d)$, donc ses coordonnées vérifient l'équation de (d).

$$\begin{aligned} 4x_A - 3y_A + c = 0 &\Leftrightarrow 4 \times 1 - 3 \times 2 + c = 0 \\ &\Leftrightarrow -2 + c = 0 \\ &\Leftrightarrow c = 2 \end{aligned}$$

Donc $4x - 3y + 2 = 0$ est une équation cartésienne de (d).

2. $A(-2;3)$ et $\vec{u}(5;2)$.

$\vec{u} = (-b;a)$ avec $a = 2$ et $b = -5$.
Donc une équation cartésienne de (d) est $2x - 5y + c = 0$, avec $c \in \mathbb{R}$.
$A \in (d)$, donc ses coordonnées vérifient l'équation de (d).

$$\begin{aligned} 2x_A - 5y_A + c = 0 &\Leftrightarrow 2 \times (-2) - 5 \times 3 + c = 0 \\ &\Leftrightarrow -19 + c = 0 \\ &\Leftrightarrow c = 19 \end{aligned}$$

Donc $2x - 5y + 19 = 0$ est une équation cartésienne de (d).

3. $A(-2;3)$ et $\vec{u}(5;2)$.

$\vec{u} = (-b;a)$ avec $a = 2$ et $b = -5$.
Donc une équation cartésienne de (d) est $2x - 5y + c = 0$, avec $c \in \mathbb{R}$.
$A \in (d)$, donc ses coordonnées vérifient l'équation de (d).

$$\begin{aligned} 2x_A - 5y_A + c = 0 &\Leftrightarrow 2 \times (-2) - 5 \times 3 + c = 0 \\ &\Leftrightarrow -19 + c = 0 \\ &\Leftrightarrow c = 19 \end{aligned}$$

Donc $2x - 5y + 19 = 0$ est une équation cartésienne de (d).

4. $A(-2;3)$ et $\vec{u}(5;2)$.

$\vec{u} = (-b;a)$ avec $a = 2$ et $b = -5$.
Donc une équation cartésienne de (d) est $2x - 5y + c = 0$, avec $c \in \mathbb{R}$.
$A \in (d)$, donc ses coordonnées vérifient l'équation de (d).

$$\begin{aligned} 2x_A - 5y_A + c = 0 &\Leftrightarrow 2 \times (-2) - 5 \times 3 + c = 0 \\ &\Leftrightarrow -19 + c = 0 \\ &\Leftrightarrow c = 19 \end{aligned}$$

Donc $2x - 5y + 19 = 0$ est une équation cartésienne de (d).

8 Dans chacun des cas, déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

1. $A(1;2)$ et $B(5;7)$.

$\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (AB).
On a : $\overrightarrow{AB} = (5-1;7-2) = (4;5)$.
$\overrightarrow{AB} = (-b;a)$ avec $a = 5$ et $b = -4$.
Donc une équation cartésienne de (d) est $5x - 4y + c = 0$, avec $c \in \mathbb{R}$.
$A \in (d)$, donc ses coordonnées vérifient l'équation de (d).

$$\begin{aligned} 5x_A - 4y_A + c = 0 &\Leftrightarrow 5 \times 1 - 4 \times 2 + c = 0 \\ &\Leftrightarrow -3 + c = 0 \\ &\Leftrightarrow c = 3 \end{aligned}$$

Donc $5x - 4y + 3 = 0$ est une équation cartésienne de (d).

2. $A(2;-1)$ et $B(3;-4)$.

$\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (AB).
On a : $\overrightarrow{AB} = (3-2;-4-(-1)) = (1;-3)$.
$\overrightarrow{AB} = (-b;a)$ avec $a = -3$ et $b = -1$.
Donc une équation cartésienne de (d) est $-3x - y + c = 0$, avec $c \in \mathbb{R}$.

$A \in (d)$, donc ses coordonnées vérifient l'équation de (d).

$$\begin{aligned} -3x_A - y_A + c = 0 &\Leftrightarrow -3 \times 2 - 1 \times (-1) + c = 0 \\ &\Leftrightarrow -5 + c = 0 \\ &\Leftrightarrow c = 5 \end{aligned}$$

Donc $-3x - y + 5 = 0$ est une équation cartésienne de (d).

3. $A(-4;-9)$ et $B(2;5)$.

$\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (AB).
On a : $\overrightarrow{AB} = (2-(-4); 5-(-9)) = (6;14)$.
$\overrightarrow{AB} = (-b;a)$ avec $a = 14$ et $b = -6$.
Donc une équation cartésienne de (d) est $14x - 6y + c = 0$, avec $c \in \mathbb{R}$.
$A \in (d)$, donc ses coordonnées vérifient l'équation de (d).

$$\begin{aligned} 14x_A - 6y_A + c = 0 &\Leftrightarrow 14 \times (-4) - 6 \times (-9) + c = 0 \\ &\Leftrightarrow -2 + c = 0 \\ &\Leftrightarrow c = 2 \end{aligned}$$

Donc $14x - 6y + 2 = 0$ est une équation cartésienne de (d).

4. $A(7;3)$ et $B(-4;-2)$.

$\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (AB).
On a : $\overrightarrow{AB} = (-4-7; -2-3) = (-11;-5)$.
$\overrightarrow{AB} = (-b;a)$ avec $a = -5$ et $b = 11$.
Donc une équation cartésienne de (d) est $-5x + 11y + c = 0$, avec $c \in \mathbb{R}$.
$A \in (d)$, donc ses coordonnées vérifient l'équation de (d).

$$\begin{aligned} -5x_A + 11y_A + c = 0 &\Leftrightarrow -5 \times 7 + 11 \times 3 + c = 0 \\ &\Leftrightarrow -2 + c = 0 \\ &\Leftrightarrow c = 2 \end{aligned}$$

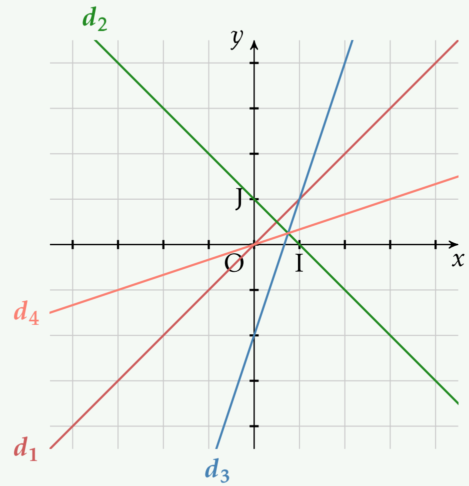
Donc $-5x + 11y + 2 = 0$ est une équation cartésienne de (d).

C Équation réduite

9 Tracer une droite, connaissant son équation réduite

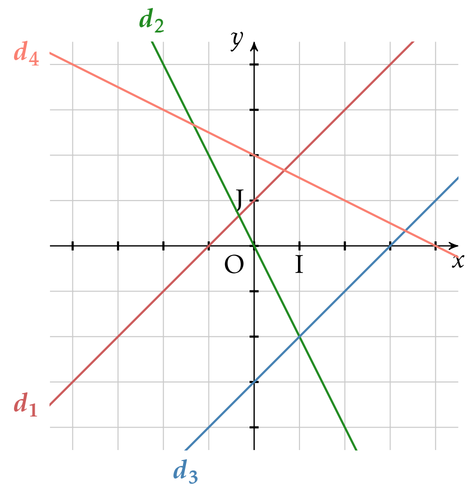
Dans un repère, représenter chacune des droites ci-dessous, dont on donne l'équation réduite.

- $(d_1) : y = x$.
- $(d_2) : y = -x + 1$.
- $(d_3) : y = 3x - 2$.
- $(d_4) : y = \frac{1}{3}x$.



10 Déterminer graphiquement l'équation réduite d'une droite

Déterminer les équations réduites des droites représentées ci-dessous.



La droite d_1 a pour équation réduite $y = x + 1$.
La droite d_2 a pour équation réduite $y = -2x$.
La droite d_3 a pour équation réduite $y = x - 3$.
La droite d_4 a pour équation réduite $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

11 Déterminer l'équation réduite d'une droite, connaissant deux points

Soient $A(-0{,}5;-5)$ et $B(2{,}3;0{,}6)$.

1. Représenter avec le plus de précision possible les points A et B dans un repère.
2. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

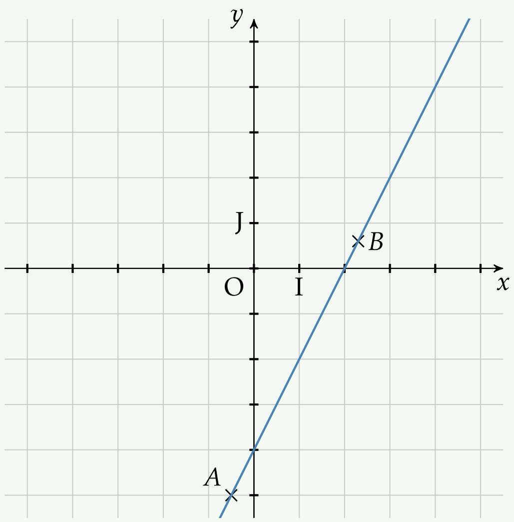
On calcule le coefficient directeur m de la droite (AB).

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \\ &= \frac{0{,}6-(-5)}{2{,}3-(-0{,}5)} \\ &= 2 \end{aligned}$$

On sait que $A \in (AB)$, ses coordonnées vérifient donc l'équation réduite de (AB).

$$\begin{aligned} y_A = 2x_A + p &\Leftrightarrow -5 = 2\times(-0{,}5)+p \\ &\Leftrightarrow -5+1 = p \\ &\Leftrightarrow -4 = p \end{aligned}$$

Donc l'équation réduite de (AB) est $y = 2x - 4$.



12 Dans chacun des cas, déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

1. $A(-2{,}8;-2{,}4)$ et $B(6{,}3;24{,}9)$.

On calcule le coefficient directeur m de la droite (AB).

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \\ &= \frac{24{,}9-(-2{,}4)}{6{,}3-(-2{,}8)} \\ &= 3 \end{aligned}$$

On sait que $A \in (AB)$, ses coordonnées vérifient donc l'équation réduite de (AB).

$$\begin{aligned} y_A = 3x_A + p &\Leftrightarrow -2{,}4 = 3\times(-2{,}8)+p \\ &\Leftrightarrow -2{,}4+8{,}4 = p \\ &\Leftrightarrow 6 = p \end{aligned}$$

Donc l'équation réduite de (AB) est $y = 3x + 6$.

2. $A(-5{,}8;25{,}2)$ et $B(-2{,}3;11{,}2)$.

On calcule le coefficient directeur m de la droite (AB).

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \\ &= \frac{11{,}2-25{,}2}{-2{,}3-(-5{,}8)} \\ &= -4 \end{aligned}$$

On sait que $A \in (AB)$, ses coordonnées vérifient donc l'équation réduite de (AB).

$$\begin{aligned} y_A = -4x_A + p &\Leftrightarrow 25{,}2 = -4\times(-5{,}8)+p \\ &\Leftrightarrow 25{,}2-23{,}2 = p \\ &\Leftrightarrow 2 = p \end{aligned}$$

Donc l'équation réduite de (AB) est $y = -4x + 2$.

3. $A(-3;-3)$ et $B(5;\frac{7}{3})$.

On calcule le coefficient directeur m de la droite (AB).

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \\ &= \frac{\frac{7}{3}-(-3)}{5-(-3)} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

On sait que $A \in (AB)$, ses coordonnées vérifient donc l'équation réduite de

(AB).

$$\begin{aligned} y_A = \frac{2}{3}x_A + p &\Leftrightarrow -3 = \frac{2}{3}\times(-3)+p \\ &\Leftrightarrow -3+2 = p \\ &\Leftrightarrow -1 = p \end{aligned}$$

Donc l'équation réduite de (AB) est $y = \frac{2}{3}x - 1$.

4. $A(4;-\frac{14}{15})$ et $B(12;-\frac{18}{5})$.

On calcule le coefficient directeur m de la droite (AB).

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \\ &= \frac{-\frac{18}{5} - \left(-\frac{14}{15}\right)}{12-4} \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

On sait que $A \in (AB)$, ses coordonnées vérifient donc l'équation réduite de (AB).

$$\begin{aligned} y_A = -\frac{1}{3}x_A + p &\Leftrightarrow -\frac{14}{15} = -\frac{1}{3}\times 4 + p \\ &\Leftrightarrow -\frac{14}{15} + \frac{4}{3} = p \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{5} = p \end{aligned}$$

Donc l'équation réduite de (AB) est $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}$.

D Position relative de droites

13 Résolution graphique de systèmes d'équations

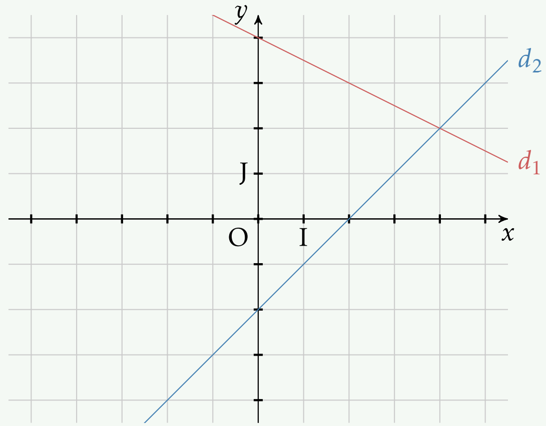
Dans chacun des cas, résoudre graphiquement le système d'équations.

1. $\begin{cases} x+2y = 8 \\ -x+y = -2 \end{cases}$

$$\begin{cases} x+2y = 8 \\ -x+y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-8 = 0 \\ -x+y+2 = 0 \end{cases}$$

La droite d_1 d'équation cartésienne $x+2y-8=0$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(-2;1)$, et on montre facilement en remplaçant x par 0, que le point $A(0;4)$ appartient à d_1.

De même, la droite d_2 d'équation cartésienne $-x+y+2=0$ a pour vecteur directeur $\vec{v}(-1;-1)$, et on montre facilement en remplaçant x par 0, que le point $B(0;-2)$ appartient à d_2.



$(d1)$ et $(d2)$ s'intersectent en $(4;2)$, donc $S = \{(4;2)\}$.

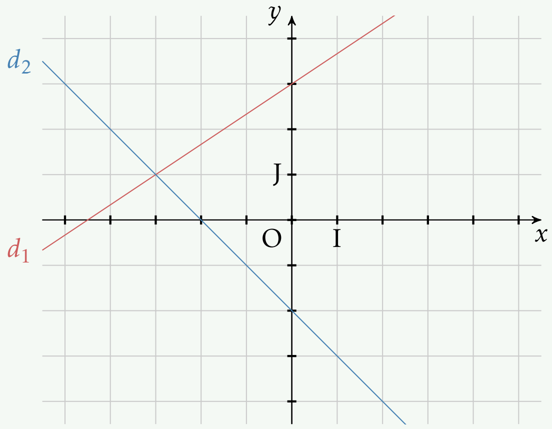
On peut contrôler rapidement ce résultat en remplaçant x par 4 et y par 2 dans le système initial et en regardant si les deux équations sont bien vérifiées.

2. $\begin{cases} 2x-3y = -9 \\ -x-y = 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x-3y = -9 \\ -x-y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y+9 = 0 \\ -x-y-2 = 0 \end{cases}$$

La droite d_1 d'équation cartésienne $2x-3y+9=0$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(3;2)$, et on montre facilement en remplaçant x par 0, que le point $A(0;3)$ appartient à d_1.

De même, la droite d_2 d'équation cartésienne $-x-y-2=0$ a pour vecteur directeur $\vec{v}(1;-1)$, et on montre facilement en remplaçant x par 0, que le point $B(0;-2)$ appartient à d_2.



$(d1)$ et $(d2)$ s'intersectent en $(-3;1)$, donc $S = \{(-3;1)\}$.

14 Droites sécantes et point d'intersection

Dans chacun des cas, dire si les droites d_1 et d_2 sont sécantes, puis le cas échéant, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

1. $d_1 : -5x + 3y + 2 = 0$ et $d_2 : -x + 2y + 6 = 0$.

$\vec{u}(-3;-5)$ est un vecteur directeur de d_1 et $\vec{v}(-2;-1)$ est un vecteur directeur de d_2.

$$\begin{aligned}\det(\vec{u},\vec{v}) &= -3 \times (-1) - (-2) \times (-5)\\ &= -7\end{aligned}$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
Donc les droites d_1 et d_2 sont sécantes.
En résolvant le système $\begin{cases} -5x + 3y + 2 = 0 \\ -x + 2y + 6 = 0 \end{cases}$, on trouve comme solution le couple $(-2;-4)$.
Donc le point d'intersection de d_1 et d_2 est le point de coordonnées $(-2;-4)$.

2. $d_1 : x - y - 8 = 0$ et $d_2 : 3x + y - 16 = 0$.

$\vec{u}(1;1)$ est un vecteur directeur de d_1 et $\vec{v}(-1;3)$ est un vecteur directeur de d_2.

$$\begin{aligned}\det(\vec{u},\vec{v}) &= 1 \times 3 - (-1) \times 1\\ &= 4\end{aligned}$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
Donc les droites d_1 et d_2 sont sécantes.

En résolvant le système $\begin{cases} x - y - 8 = 0 \\ 3x + y - 16 = 0 \end{cases}$, on trouve comme solution le couple $(6;-2)$.
Donc le point d'intersection de d_1 et d_2 est le point de coordonnées $(6;-2)$.

3. $d_1 : -2x - 3y + 28 = 0$ et $d_2 : 4x - 5y - 34 = 0$.

$\vec{u}(3;-2)$ est un vecteur directeur de d_1 et $\vec{v}(5;4)$ est un vecteur directeur de d_2.

$$\begin{aligned}\det(\vec{u},\vec{v}) &= 3 \times 4 - 5 \times (-2)\\ &= 22\end{aligned}$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
Donc les droites d_1 et d_2 sont sécantes.
En résolvant le système $\begin{cases} -2x - 3y + 28 = 0 \\ 4x - 5y - 34 = 0 \end{cases}$, on trouve comme solution le couple $(11;2)$.
Donc le point d'intersection de d_1 et d_2 est le point de coordonnées $(11;2)$.

4. $d_1 : -4x + 3y - 9 = 0$ et $d_2 : 3x + 7y + 53 = 0$.

$\vec{u}(-3;-4)$ est un vecteur directeur de d_1 et $\vec{v}(-7;3)$ est un vecteur directeur de d_2.

$$\begin{aligned}\det(\vec{u},\vec{v}) &= -3 \times 3 - (-7) \times (-4)\\ &= -37\end{aligned}$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
Donc les droites d_1 et d_2 sont sécantes.
En résolvant le système $\begin{cases} -4x + 3y - 9 = 0 \\ 3x + 7y + 53 = 0 \end{cases}$, on trouve comme solution le couple $(-6;-5)$.
Donc le point d'intersection de d_1 et d_2 est le point de coordonnées $(-6;-5)$.

15 Droite parallèle, passant par un point

Soient $A(1;2)$ et $B(3;5)$.

1. Déterminer une équation cartsienne de (AB).
2. Soit $C(1;1)$. Déterminer une équation cartésienne de la droite parallèle à (AB) passant par C.

$\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (AB).

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A) = (3-1; 5-2) = (2;3)$.
$\overrightarrow{AB} = (-b; a)$ avec $a = 3$ et $b = -2$.
Donc une équation cartésienne de (AB) est $3x - 2y + c = 0$, avec $c \in \mathbb{R}$.
$A \in (AB)$, donc ses coordonnées vérifient l'équation de (AB).

$$\begin{aligned} 3x_A - 2y_A + c = 0 &\Leftrightarrow 3 \times 1 - 2 \times 2 + c = 0 \\ &\Leftrightarrow c = 1 \end{aligned}$$

Donc une équation cartésienne de (AB) est $3x - 2y + 1 = 0$.
Notons (d) la droite parallèle à (AB) passant par C.
$\overrightarrow{AB}$ est aussi un vecteur directeur de (d).
Donc une équation cartsésienne de (d) est $3x - 2y + c' = 0$, avec $c' \in \mathbb{R}$.
$C \in (d)$ si ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne de (d).

$$\begin{aligned} 3x_C - 2y_C + c' = 0 &\Leftrightarrow 3 \times 1 - 2 \times 1 + c' = 0 \\ &\Leftrightarrow c' = -1 \end{aligned}$$

Donc une équation cartésienne de (d) est $3x - 2y - 1 = 0$.

16 Position relative de droites

Dans chacun des cas, déterminer si les droites d_1 et d_2 sont sécantes, parallèles et disjointes, ou confondues.
Si elles sont sécantes, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

1. $d_1 : x + 2y + 3 = 0$ et $d_2 : 2x + 4y + 6 = 0$.

$$x + 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x + 4y + 6 = 0$$

d_1 et d_2 ont une équation cartésienne identique, donc elles sont confondues.
Autre méthode :
$\vec{u}(-2;1)$ est un vecteur directeur de d_1.
$\vec{v}(-4;2)$ est un vecteur directeur de d_2.

$$\begin{aligned} \det(\vec{u},\vec{v}) &= -2 \times 2 - (-4) \times 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
Donc les droites d_1 et d_2 sont parallèles.
Par ailleurs, cherchons un point de d_1. En remplaçant x par 0, on a :

$$\begin{aligned} 0 + 2y_A + 3 = 0 &\Leftrightarrow 2y_A = -3 \\ &\Leftrightarrow y_A = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Donc le point $A(0; -\frac{3}{2}) \in d_1$.
A-t-on $A \in d_2$? On remplace ses coordonnées dans l'équation de d_2.

$$2 \times x_A + 4 \times y_A + 6 = 2 \times 0 + 4 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + 6 \qquad = 0$$

Donc $A \in d_2$.
On en déduit que les droites d_1 et d_2 sont confondues.

2. $d_1 : 4x - 2y + 1 = 0$ et $d_2 : -8x + 4y + 4 = 0$.

$\vec{u}(2;4)$ est un vecteur directeur de d_1.
$\vec{v}(-4;-8)$ est un vecteur directeur de d_2.

$$\begin{aligned} \det(\vec{u},\vec{v}) &= 2 \times (-8) - (-4) \times 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
Donc les droites d_1 et d_2 sont parallèles.
Par ailleurs, cherchons un point de d_1. En remplaçant x par 0, on a :

$$\begin{aligned} 0 - 2y_A + 1 = 0 &\Leftrightarrow -2y_A = -1 \\ &\Leftrightarrow y_A = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc le point $A(0; \frac{1}{2}) \in d_1$.
A-t-on $A \in d_2$? On remplace ses coordonnées dans l'équation de d_2.

$$\begin{aligned} -8 \times x_A + 4 \times y_A + 4 &= -8 \times 0 + 4 \times \frac{1}{2} + 4 \\ &= 6 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Donc $A \notin d_2$.
On en déduit que les droites d_1 et d_2 sont parallèles et disjointes.

3. $d_1 : x + 5y - 17 = 0$ et $d_2 : 3x - 2y + 17 = 0$.

$\vec{u}(-5;1)$ est un vecteur directeur de d_1.
$\vec{v}(2;3)$ est un vecteur directeur de d_2.

$$\begin{aligned} \det(\vec{u},\vec{v}) &= -5 \times 3 - 2 \times 1 \\ &= -17 \end{aligned}$$

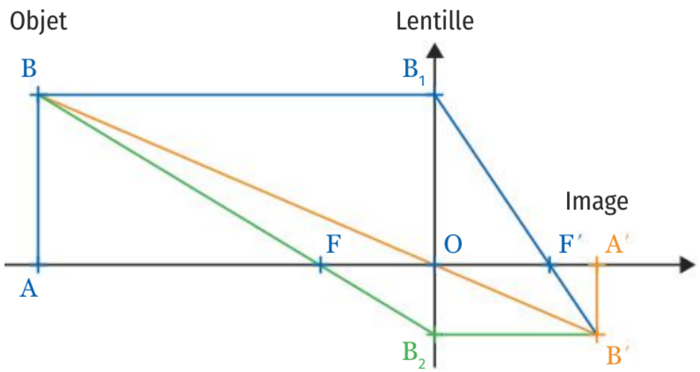
Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
Donc les droites d_1 et d_2 sont sécantes.
En résolvant le système $\begin{cases} x+5y-17=0 \\ 3x-2y+17=0 \end{cases}$, on trouve comme solution le couple $(-3;4)$.
Donc le point d'intersection de d_1 et d_2 est le point de coordonnées $(-3;4)$.

17 En optique

En optique, on rappelle les règles suivantes de construction des rayons lumineux traversant une lentille convergente de foyers F et F' et de centre O :

- les rayons passant par le centre oprtique ne sont pas déviés.
- les rayons parralèles à l'axe des foyers sortent de la lentille en passant par F'.
- les rayons passant par F sortent parralèles à l'axe des foyers.

L'image d'un objet AB placé parallèlement à la lentille est obtenue comme l'indique le schéma suivant.
On a $OF = OF' = f$ où f est la distance focale de la lentille.
O est l'origine d'un repère orthonormé, l'axe des abscisses étant la droite (FF') .



1. Déterminer les coordonnées des foyers F et F'.
2. On note x_A l'abscisse de A avec $x_A \neq 0$, et y_B l'ordonnée de B.
   (a) Déterminer une équation cartésienne de la droite (OB).
   (b) Déterminer une équation cartésienne de la droite (BF).
3. En déduire les coordonnées des points A' et B' en fonction de f, x_A et y_B.
4. Retrouver la relation suivante, appelée "relation de conjugaison" :

$$\frac{1}{x_{A'}} - \frac{1}{x_A} = \frac{1}{f}$$

1. $F(-f;0)$ et $F'(f;0)$.
2. (a) Le point B a pour coordonnées $(x_A;y_B)$ et le point O a pour coordonnées $(0;0)$.
   Le vecteur $\overrightarrow{OB}$ est un vecteur directeur de (OB).

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OB} &= (x_B - x_O; y_B - y_O) \\ &= (x_A - 0; y_B - 0) \\ &= (x_A; y_B) \end{aligned}$$

   $\overrightarrow{OB} = (-b;a)$, avec $a = y_B$ et $b = -x_A$.
   Donc une équation cartésienne de (OB) est $y_B x - x_A + c = 0$ avec $c \in \mathbb{R}$.
   De plus, $O \in (OB)$, donc ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne.

$$\begin{aligned} y_B x_O - x_A y_O + c = 0 &\Leftrightarrow y_B \times 0 - x_A \times 0 + c = 0 \\ &\Leftrightarrow c = 0 \end{aligned}$$

   Donc $y_B x - x_A y = 0$ est une équation cartésienne de (OB).

   (b) $\overrightarrow{BF}$ est un vecteur directeur de (BF).

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BF} &= (x_F - x_B; y_F - y_B) \\ &= (-f - x_A; 0 - y_B) \\ &= (-f - x_A; -y_B) \end{aligned}$$

   $\overrightarrow{BF} = (-b;a)$ avec $a = -y_B$ et $b = f + x_A$.
   Donc une équation cartésienne de (BF) est $-y_B x + (f + x_A)y + c = 0$, avec $c \in \mathbb{R}$.
   De plus, $F \in (BF)$, donc ses coordonnées vérifient l'équation de (BF).

$$\begin{aligned} -y_B x_F + (f + x_A) y_F + c = 0 &\Leftrightarrow -y_B \times (-f) + (f + x_A) \times 0 + c = 0 \\ &\Leftrightarrow f y_B + c = 0 \\ &\Leftrightarrow c = -f y_B \end{aligned}$$

   Donc $-y_B x + (f + x_A)y - f y_B = 0$ est une équation cartésienne de (BF).
3. B' est le point de (OB) ayant pour ordonnée p où p est l'ordonnée à l'origine de (BF).
   On remplace donc x par 0 dans l'équation de (BF) pour trouver $y_{B'}$.

$$\begin{aligned} -y_B \times 0 + (f + x_A)y - f y_B = 0 &\Leftrightarrow (f + x_A) y = f y_B \\ &\Leftrightarrow y = \frac{f y_B}{f + x_A} \end{aligned}$$

Donc $y_{B'} = \frac{fy_B}{f+x_A}$.
Or $B' \in (OB)$, donc ses coordonnées vérifient l'équation de (OB).

$$\begin{aligned} y_B x_{B'} - x_A y_{B'} = 0 &\Leftrightarrow y_B x_{B'} - x_A \times \frac{fy_B}{f+x_A} = 0 \\ &\Leftrightarrow y_B x_{B'} = \frac{x_A f y_B}{f+x_A} \\ &\Leftrightarrow x_{B'} = \frac{x_A f}{f+x_A} \end{aligned}$$

Donc $B'\left(\frac{x_A f}{f+x_A}; \frac{fy_B}{f+x_A}\right)$.
Par ailleurs, $y_{A'} = 0$ et $x_{A'} = x_{B'}$.
Donc $A'\left(\frac{x_A f}{f+x_A}; 0\right)$.

4. On a ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_{A'}} - \frac{1}{x_A} &= \frac{1}{\frac{x_A f}{f+x_A}} - \frac{1}{x_A} \\ &= \frac{f+x_A}{x_A f} - \frac{1}{x_A} \\ &= \frac{f+x_A}{x_A f} - \frac{f}{x_A f} \\ &= \frac{x_A}{x_A f} \\ &= \frac{1}{f} \end{aligned}$$