8 Représentations des droites du plan

Rappel

- Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$.

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = \dots\dots\dots$$

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$.
- Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$.

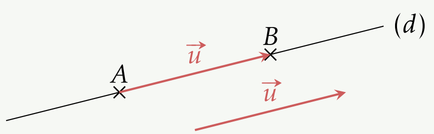
$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{pmatrix}$$

I Généralités sur les droites

I.1 Vecteurs directeurs d'une droite

Définition 8.1 – Vecteur directeur

On appelle ____________________ d'une droite (d) tout vecteur $\vec{u}$ dont (d) est la direction ; c'est à dire qu'il existe deux points distincts A et B de (d) tels que ………

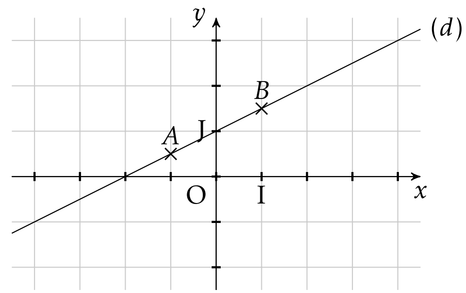


Remarque(s) :

- Une droite possède une infinité de vecteurs directeurs.

Exemple 8.1 :

Sur la figure ci-dessous, tracer trois vecteurs directeurs de la droite (d).



Exemple 8.2 :

Soient $A(-1;3)$, $B(4;2)$ et $\vec{u}(12{,}5;-2{,}5)$.
$\vec{u}$ est-il un vecteur directeur de (AB) ?

I.2 Parallélisme

Propriété 8.1 – Vecteurs directeurs et parallélisme

Soient (d) et (d') deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$.
(d) et (d') sont parallèles si et seulement si ……………

Exemple 8.3 :

Soient les points $A(2;-3)$, $B(5;3)$, $C(1;4)$ et $D(-1;0)$.
Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

Exercices : A

II Équations de droites

II.1 Équations cartésiennes d'une droite

Définition 8.2 – Équation cartésienne d'une droite

Soit (d) une droite du plan.
Il existe trois réels a, b et c tels que l'ensemble des points $M(x;y)$ de (d) vérifient la relation :

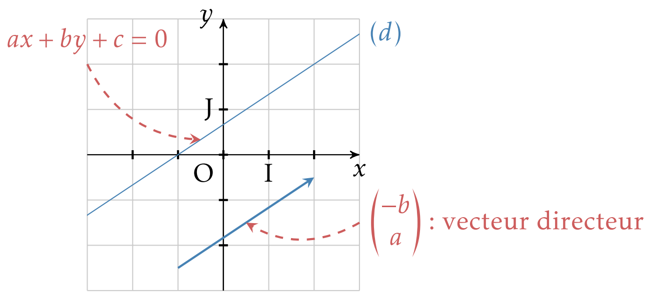
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Cette relation est appelée ____________________ de la droite (d).

Propriété 8.2 – Équation cartésienne et vecteur directeur

- Si (d) a pour équation cartésienne $ax+by+c=0$ alors le vecteur $\ldots\ldots$ est un vecteur directeur de (d).
- Réciproquement, si $\ldots\ldots$ est un vecteur directeur de (d), alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $ax+by+c=0$ est une équation cartésienne de (d).

Illustration



Remarque(s) :

- Pour toute droite, il existe une infinité d'équations cartésiennes.

Exemple 8.4 :

Soit (d) une droite dont $-2x+4y-1=0$ est une équation cartésienne. Donner un vecteur directeur de (d).

Exemple 8.5 :

Soient $A(4;6)$ et $B(-1;2)$.
Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

Exercices : B

II.2 Équation réduite d'une droite

Propriété 8.3

Toute droite (d) d'équation $ax+by+c=0$ avec $b \neq 0$ possède un vecteur directeur de coordonnées $\ldots\ldots$ où $\ldots\ldots\ldots\ldots$

Démonstration

Soit (d) une droite d'équation $ax+by+c=0$, avec $b \neq 0$.
Le vecteur $\vec{u}(-b;a)$ est un vecteur directeur de (d).
Donc $-\frac{1}{b} \times \vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de (d).
Or :

$$-\frac{1}{b} \times \vec{u} = -\frac{1}{b} \times (-b;a)$$

$$= \left(-\frac{1}{b}\times(-b); -\frac{1}{b}\times a\right)$$
$$= \left(1; -\frac{a}{b}\right)$$

□

Définition 8.3 – Coefficient directeur

Le nombre m de la propriété précédente s'appelle ______________________ de la droite (d).

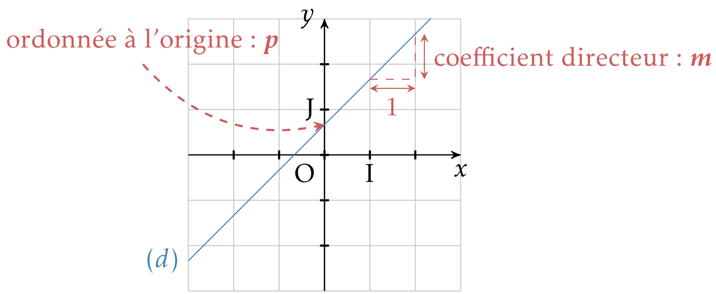
Propriété 8.4

Soit (d) une droite de coefficient directeur m.
Il existe un nombre p tel que l'équation de (d) s'écrive ....

Définition 8.4 – Équation réduite d'une droite

L'équation $y = mx + p$ s'appelle ___________________ de (d).
p est l' ______________________ de la droite (d).

Illustration



Remarque(s) :

- L'ordonnée à l'origine est l'ordonnée du point d'intersection de (d) avec l'axe des ordonnées. Il s'agit du point de (d) ayant pour abscisse 0, d'où le terme.

Exemple 8.6 :

Soit (d) la droite dont on donne une équation cartésienne : $3x - 4y + 2 = 0$.

1. Déterminer le coefficient directeur de (d).
2. Déterminer l'ordonnée à l'origine de la droite (d).
3. En déduire l'équation réduite de (d).

Propriété 8.5 – Calcul du coefficient directeur

Le coefficient directeur d'une droite (AB) non parallèle à l'axe des ordonnées est égal à :

......

Exemple 8.7 :

Soient $A(3;9)$ et $B(-4;-5)$.

1. Déterminer le coefficient directeur de (AB).
2. En déduire l'équation réduite de (AB).

Exercices : C

III Position relative de droites

III.1 Droites sécantes

Théorème 8.1

Soient d et d' deux droites d'équations respectives $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c=0$.
d et d' sont sécantes si et seulement si ....

Démonstration

d et d' ont pour vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}(-b;a)$ et $\vec{u'}(-b';a')$.
d et d' sont sécantes si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ ne sont pas colinéaires.

$$\begin{aligned}\det(\vec{u},\vec{u'}) \neq 0 &\Leftrightarrow -b\times a' - (-b')\times a \neq 0\\ &\Leftrightarrow ab' - a'b \neq 0\end{aligned}$$

□

Propriété 8.6 – Coordonnées du point d'intersection

Si d et d' sont sécantes, alors les coordonnées du point d'intersection $M(x;y)$ sont solutions du système :

$$\begin{cases} ax+by+c=0\\ a'x+b'y+c'=0\end{cases}$$

Exemple 8.8 :

Soient d et d' deux droites d'équations respectives $x+4y-11=0$ et $-3x+4y+1=0$.

1. Les droites d et d' sont-elles sécantes ?

2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de d et d'.

III.2 Droites parallèles/confondues

Propriété 8.7

Soient d et d' deux droites parallèles et M un point quelconque de d.
d et d' sont confondues si et seulement si ________________ .

Exemple 8.9 :

Soient d et d' deux droites d'équations $-3x+4y-6=0$ et $-3x+4y+17=0$.

1. Les droites d et d' sont-elles sécantes ?

2. Les droites d et d' sont-elles confondues ?

Exercices : D