7 Fonctions affines

I Introduction

I.1 Définition et propriétés

Définition 7.1 – Fonction affine

Une fonction f est dite **affine** s'il existe deux réels m et p tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \boldsymbol{mx + p}$$

Propriété 7.1 – Cas particuliers

Soient m et p deux réels, et $f : x \mapsto mx + p$.

- Si $m = 0$, alors f est **constante**.
- Si $p = 0$, alors f est **linéaire**.

Exemple 7.1 :

Les fonctions suivantes sont-elles affines ? Si oui, préciser les valeurs de m et p.

1. $f : x \mapsto -x + 5$. Oui, $m = -1$ et $p = 5$.
2. $g : x \mapsto x^2 - 1$. Non.
3. $h : x \mapsto 6x$. Oui, h est linéaire. On a $m = 6$ et $p = 0$.
4. $k : x \mapsto -2$. Oui. k est constante, on a $m = 0$ et $p = -1$

Propriété 7.2

f est une fonction affine si et seulement si $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est **constant**, **pour tous** réels a et b distincts.
$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est appelé **taux d'accroissement de f entre a et b**.

Remarque(s) :

- $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ revient à diviser la variation en ordonnée par la variation en abscisse. On obtient comme résultat la variation en ordonnée pour une variation d'une unité en abscisse.

Méthode On peut donc montrer qu'une fonction n'est pas affine en calculant deux taux d'accroissements n'ayant pas la même valeur.

Exemple 7.2 :

Dans les deux cas, dire si une fonction f vérifiant ces données pourrait être une fonction affine.

1. $f(1) = 2$, $f(5) = 4$ et $f(6) = \frac{9}{2}$.
2. $f(3) = 7$, $f(-2) = 2$ et $f(-1) = 4$.

Corollaire 7.3

Soit $f : x \mapsto mx + p$ une fonction affine et soient a et b deux réels distincts.
On a :

$$m = \boldsymbol{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}} \qquad p = \boldsymbol{f(a) - ma}$$

Méthode Il suffit donc de connaître l'image de deux valeurs distinctes pour déterminer l'expression d'une fonction affine.

Exemple 7.3 :

Soit f une fonction affine telle que $f(1) = 8$ et $f(-3) = 5$.
Déterminer l'expression de f.

I.2 Représentation graphique

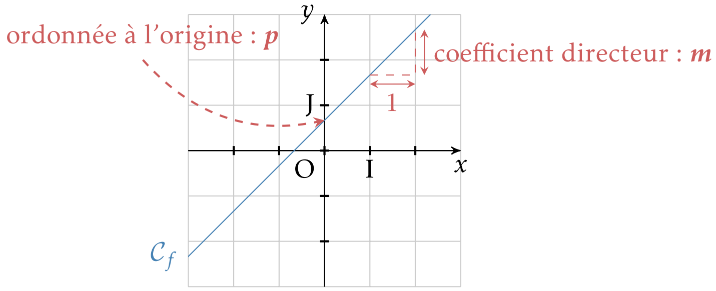
Propriété 7.4

Soit $f : x \mapsto mx + p$, avec m et p deux réels.
$\mathcal{C}_f$ est une droite dont m est le **coefficient directeur** et p est l'**ordonnée à l'origine**.

Remarque(s) :

- le coefficient directeur correspond concrètement à la variation en y lorsqu'on augmente x d'une unité.
- l'ordonnée à l'origine est l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées. En effet $p = f(0)$, il s'agit donc bien de la valeur en ordonnée lorsque x vaut 0 (d'où le nom d'ordonnée « à l'origine »).

Illustration



Méthode Si on connaît l'expression d'une fonction affine, on peut ainsi tracer sa courbe de deux manières différentes.

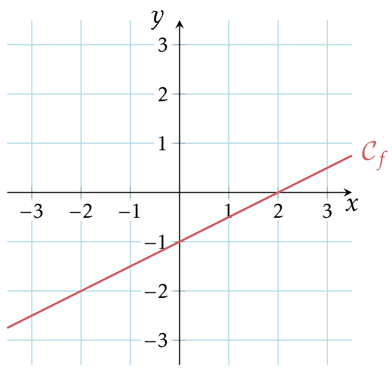
1. On calcule l'image de deux valeurs. On place les deux points de $\mathcal{C}_f$ associés, puis on trace la droite passant par ces deux points.
2. On place le point de coordonnées $(0;p)$, puis on applique le coefficient directeur pour se donner un second point. $\mathcal{C}_f$ est la droite passant par ces deux points.

Remarque(s) :

- Dans la propriété 7.1 nous avons vu que si $p = 0$, alors f est linéaire. On retrouve graphiquement que si $p = 0$, alors l'ordonnée à l'origine vaut zéro et donc la droite passe par l'origine du repère.
- Si $m = 0$, alors $\mathcal{C}_f$ est une droite horizontale car le coefficient directeur vaut alors zéro, il n'y a pas de variation en ordonnée lorsqu'on augmente x d'une unité.

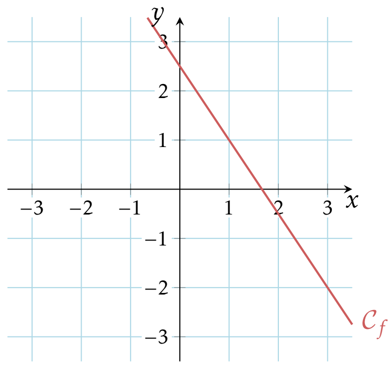
Exemple 7.4 :

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{2}x - 1$.
Tracer la courbe représentative de f dans le repère ci-dessous.



Exemple 7.5 :

En justifiant, déterminer graphiquement l'expression de la fonction affine f représentée ci-dessous.



Les points de coordonnées $(1;1)$ et $3;-2$ appartiennent à $\mathscr{C}_f$.
On a donc $f(1) = 1$ et $f(3) = -2$.
Ainsi : $m = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{-2-1}{3-1} = -\frac{3}{2}$.
On a alors :

$$\begin{aligned} p &= f(3) - m \times 3 \\ &= -2 - \left(-\frac{3}{2}\right) \times 3 \\ &= -\frac{4}{2} + \frac{9}{2} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

On en déduit que $f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$.

II Variation et signes

II.1 Sens de variation

Propriété 7.5 – Sens de variation d'une fonction affine

Soit $f : x \mapsto mx + p$ une fonction affine, avec $m \neq 0$.

- Si $m > 0$, alors f est strictement **croissante**.
- Si $m < 0$, alors f est strictement **décroissante**.

Remarque(s) :

- Graphiquement, on a donc qu'une fonction affine croissante est représentée par une droite dont le coefficient directeur est **positif** (elle est « penchée vers le haut »). À l'inverse, une fonction affine décroissante a pour courbe représentative une droite de coefficient directeur négatif.

II.2 Signes

Propriété 7.6 – Signe d'une fonction affine

Soit $f : x \mapsto mx + p$ une fonction affine, avec $m \neq 0$.

- Si $m > 0$, alors on a :

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

- Si $m < 0$, alors on a :

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Exemple 7.6 :

Soit $f : x \mapsto -3x + 2$.

1. Dresser le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	

2. Dresser le tableau de signes de f.

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	