A Propriétés et représentation graphique

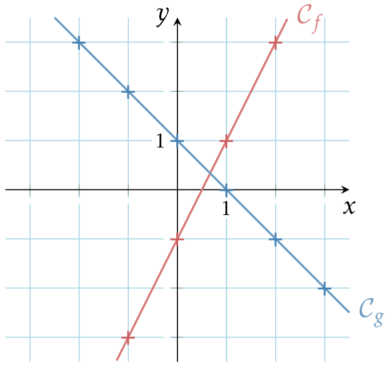
A.1 Découverte

1 Soient $f : x \mapsto 2x - 1$ et $g : x \mapsto -x + 1$.

1. Compléter le tableau de valeurs et tracer la courbe représentative de la fonction f.
2. Compléter le tableau de valeurs et tracer la courbe représentative de la fonction g.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-7	-5	-3	-1	1	3	5

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	4	3	2	1	0	-1	-2



A.2 Questions de cours

2 Soit $f : x \mapsto mx + p$ une fonction affine et a et b deux réels.

1. Rappeler la formule permettant de calculer m.
2. Sachant que le point de coordonnées $\big(a; f(a)\big)$ appartient par définition à $\mathcal{C}_f$, déterminer une équation dont p est la seule inconnue.
3. En déduire la formule du cours qui permet de calculer p.

1. $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
2. $f(a) = m \times a + p$.
3. $f(a) = m \times a + p \Leftrightarrow p = f(a) - ma$

A.3 Faire ses gammes

3 Dans chacun des cas, dire si la fonction f pourrait être une fonction affine.

1. $f(4) = -1$, $f(7) = 20$ et $f(10) = 59$.

$$\frac{f(7)-f(4)}{7-4} = \frac{20-(-1)}{7-4} = \boxed{7} \qquad \frac{f(10)-f(7)}{10-7} = \frac{59-20}{10-7} = \boxed{13}$$

$7 \neq 13$, donc f n'est pas une fonction affine.

2. $f(5) = -21$, $f(8) = -33$ et $f(1) = -5$.

$$\frac{f(8)-f(5)}{8-5} = \frac{-33-(-21)}{8-5} = \boxed{-4} \qquad \frac{f(1)-f(8)}{1-8} = \frac{-5-(-33)}{1-8} = \boxed{-4}$$

$-4 = -4$, donc f est peut-être une fonction affine.

3. $f(-4) = -11$, $f(-8) = -55$ et $f(-2) = -1$.

$$\frac{f(-8)-f(-4)}{-8-(-4)} = \frac{-55-(-11)}{-8-(-4)} = \boxed{11} \qquad \frac{f(-2)-f(-8)}{-2-(-8)} = \frac{-1-(-55)}{-2-(-8)} = \boxed{9}$$

$11 \neq 9$, donc f n'est pas une fonction affine.

4. $f(-4) = 27$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2}$ et $f(1) = 2$.

$$\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)-f(-4)}{\frac{1}{2}-(-4)} = \frac{\frac{9}{2}-27}{\frac{1}{2}-(-4)} = \boxed{-5} \qquad \frac{f(1)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2-\frac{9}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \boxed{-5}$$

$-5 = -5$, donc f est peut-être une fonction affine.

4 Dans chacun des cas, déterminer l'expression de la fonction affine f.

1. $f(1) = -7$ et $f(7) = -19$.

f est affine, son expression est donc de la forme $mx + p$.
En considérant $a = 1$ et $b = 7$, on a :

$$m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(7)-f(1)}{7-1} \qquad p = f(a) - m \times a = f(1) - (-2) \times 1$$

$$= \frac{-19-(-7)}{6} \qquad = -7+2$$

$$= \boxed{-2} \qquad = \boxed{-5}$$

Donc $\boxed{f(x) = -2x-5}$.

2. $f(2) = -15$ et $f(6) = -31$.

f est affine, son expression est donc de la forme $mx + p$.
En considérant $a = 2$ et $b = 6$, on a :

$$m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(6)-f(2)}{6-2} = \frac{-31-(-15)}{4} = \boxed{-4}$$

$$p = f(a) - m \times a = f(2) - (-4) \times 2 = -15+8 = \boxed{-7}$$

Donc $\boxed{f(x) = -4x-7}$.

3. $f(0) = 8$ et $f(2) = 9$.

f est affine, son expression est donc de la forme $mx + p$.
En considérant $a = 0$ et $b = 2$, on a :

$$m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{9-8}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$p = f(a) - m \times a = f(0) - \frac{1}{2} \times 0 = 8+0 = \boxed{8}$$

Donc $\boxed{f(x) = \frac{x}{2} + 8}$.

4. $f(-3) = \frac{21}{5}$ et $f(1) = \frac{13}{5}$.

f est affine, son expression est donc de la forme $mx + p$.

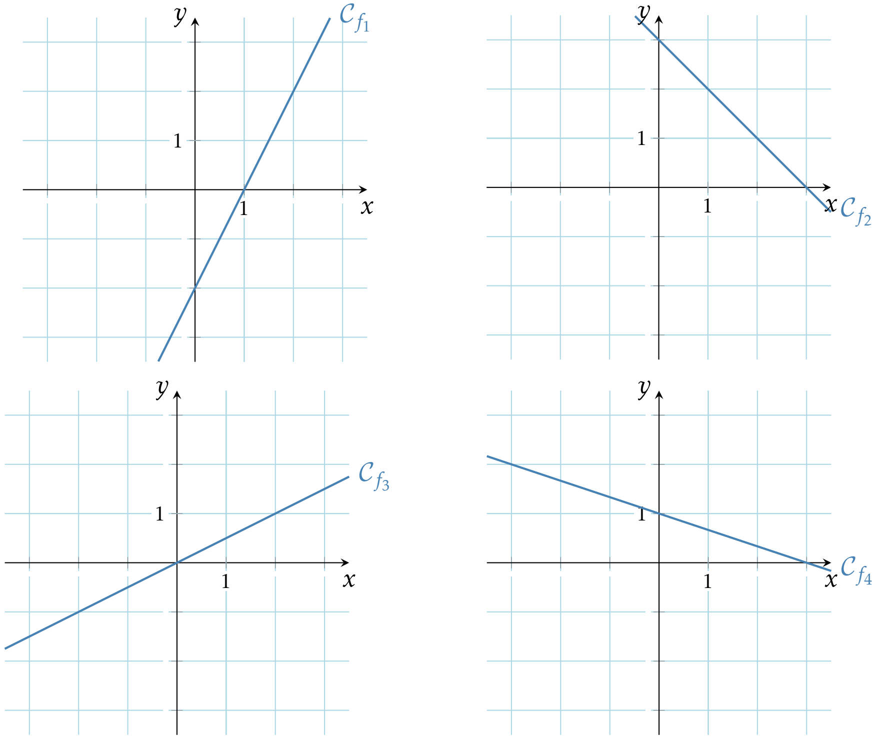
En considérant $a = -3$ et $b = 1$, on a :

$$m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(1)-f(-3)}{1-(-3)} = \frac{\frac{13}{5}-\frac{21}{5}}{4} = \boxed{-\frac{2}{5}}$$

$$p = f(a) - m \times a = f(-3) - \left(-\frac{2}{5}\right) \times (-3) = \frac{21}{5} - \frac{6}{5} = \boxed{3}$$

Donc $\boxed{f(x) = -\frac{2x}{5} + 3}$.

5 Donner l'expression de chacune des fonctions représentées :



$\boxed{f_1(x) = 2x-2}$; $\boxed{f_2(x) = -x+3}$; $\boxed{f_3(x) = \frac{x}{2}}$; $\boxed{f_4(x) = -\frac{x}{3}+1}$.

A.4 Exercices d'entraînement

6

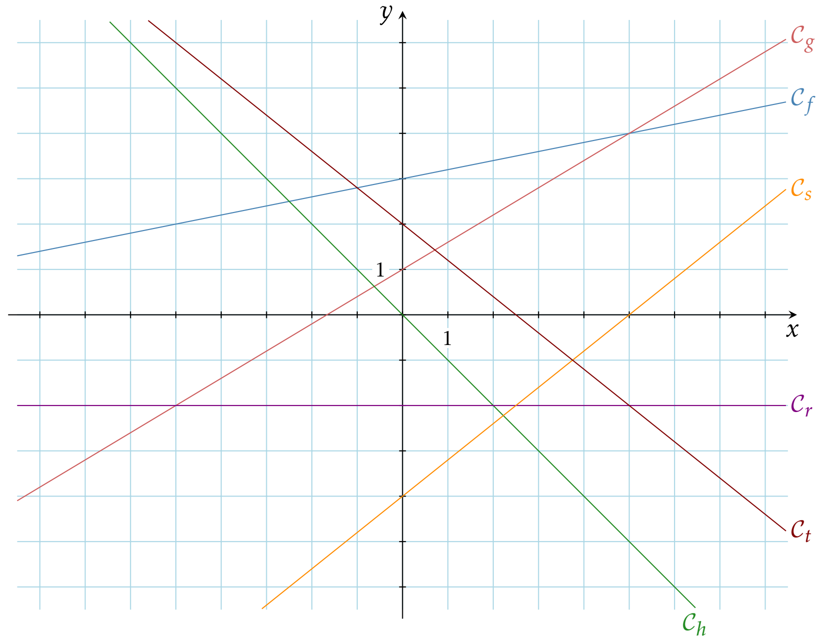
1. Compléter le tableau suivant :

Expression algébrique $f(x) =$	$\mathcal{D}_f$	Zéro	Ordonnée à l'origine	Pente de la droite
$-\frac{1}{4}x+4$	$\mathbb{R}$	16	4	$-\frac{1}{4}$
$\frac{2}{5}x+2$	$\mathbb{R}$	-5	2	$\frac{2}{5}$
$x-1$	$\mathbb{R}$	1	-1	1
6	$\mathbb{R}$	Aucun	6	0
$-\frac{2}{7}x-3$	$\mathbb{R}$	$-\frac{21}{2}$	-3	$-\frac{2}{7}$
$-\frac{2}{5}x$	$\mathbb{R}$	0	0	$-\frac{2}{5}$

L'ensemble de définition d'une fonction affine est $\mathbb{R}$ (pas de valeur interdite).
Un zéro d'une fonction est une valeur en laquelle elle s'annule.

2. Représenter les fonctions du tabeau ci-dessus sur $[-10;10]$ dans un repère orthonormé.

7 Déterminer graphiquement le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine des droites suivantes puis déterminer l'expression algébrique de la fonction représentée.



1. $\mathcal{C}_f$:
   - Coef. directeur : $\frac{1}{5}$
   - Ordonnée à l'origine : 3.
   - $f(x) = \frac{x}{5}+3$
2. $\mathcal{C}_g$:
   - Coef. directeur : $\frac{3}{5}$
   - Ordonnée à l'origine : 1.
   - $g(x) = \frac{3x}{5}+1$
3. $\mathcal{C}_h$:
   - Coef. directeur : -1
   - Ordonnée à l'origine : 0.
   - $h(x) = -x$
4. $\mathcal{C}_r$:
   - Coef. directeur : 0
   - Ordonnée à l'origine : -2.
   - $r(x) = -2$
5. $\mathcal{C}_s$:
   - Coef. directeur : $\frac{4}{5}$
   - Ordonnée à l'origine : -4.
   - $s(x) = \frac{4x}{5}-4$
6. $\mathcal{C}_t$:
   - Coef. directeur : $-\frac{4}{5}$
   - Ordonnée à l'origine : 2.
   - $t(x) = -\frac{4x}{5}+2$

8 Calculer l'aire du triangle délimité par l'axe horizontal, l'axe vertical et la droite définie par $f(x) = -4x + 500$.

On détermine les coordonnées des sommets du triangle.
Le premier sommet A est l'origine du repère.
Un deuxième sommet, B, est l'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
Ce point point a pour abscisse le zéro de f, autrement dit la solution de l'équation $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow -4x + 500 = 0 \\ &\Leftrightarrow -4x = -500 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{500}{4} \\ &\Leftrightarrow x = 125 \end{aligned}$$

Donc $B(125;0)$.
Le troisième sommet, C, est l'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des ordonnées.
Il a pour ordonnée l'ordonnée à l'origine de f, soit 500.
Donc $C(0;500)$.
ABC est rectangle en A et $AB = 125$, $AC = 500$.
Donc $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{125 \times 500}{2} = 125 \times 250 = 31\ 250$.

9 Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) + f(-x) = 1$ et $f(4) = 1$.

1. Calculer $f(0)$.
2. Déterminer l'expression algébrique de f.

1. $f(x) + f(-x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc en particulier $f(0) + f(-0) = 1$, soit $2 \times f(0) = 1$.
   Donc $f(0) = \frac{1}{2}$.
2. On a donc $p = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{2}}{4} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{4} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Donc $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{8}x + \frac{1}{2}}$.

10 Soient a un réel et g une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $g(a+5) - g(a) = -10$.
Déterminer la valeur des expressions suivantes :

1. $g(15) - g(5)$
2. $g(100) - g(105)$
3. $g(a+5) - g(a-5)$
4. $g(a+20) - g(a)$
5. $g(a) - g(a+100)$

B Sens de variation et signe

B.1 Faire ses gammes

11 Soit $f : x \mapsto \frac{5}{2}x - \frac{1}{4}$.
En utilisant le sens de variation de f, comparer $f\left(-\frac{2}{3}\right)$ et $f\left(-\frac{5}{7}\right)$.

$f(x) = ax + b$ avec $a = \frac{5}{2}$.
$\frac{5}{2} > 0$, donc f est strictement **croissante** sur $\mathbb{R}$.
$-\frac{2}{3} = -\frac{14}{21}$ et $-\frac{5}{7} = -\frac{15}{21}$.
Donc $-\frac{5}{7} < -\frac{2}{3}$.
Ainsi :

$$-\frac{5}{7} < -\frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{f\left(-\frac{5}{7}\right) < f\left(-\frac{2}{3}\right)}$$

NB : On peut vérifier rapidement en calculant effectivement $f\left(-\frac{5}{7}\right)$ et $f\left(-\frac{2}{3}\right)$.

12 Soit $f : x \mapsto -\frac{3}{2}x - \frac{2}{9}$.
En utilisant le sens de variation de f, comparer $f\left(\frac{3}{11}\right)$ et $f\left(\frac{4}{13}\right)$.

$f(x) = ax + b$ avec $a = -\frac{3}{2}$.
$-\frac{3}{2} < 0$, donc f est strictement **décroissante** sur $\mathbb{R}$.
$\frac{3}{11} = \frac{39}{143}$ et $\frac{4}{13} = \frac{44}{143}$.
Donc $\frac{3}{11} < \frac{4}{13}$.
Ainsi :

$$\frac{3}{11} < \frac{4}{13} \Rightarrow \boxed{f\left(\frac{3}{11}\right) > f\left(\frac{4}{13}\right)}$$

13 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquation suivantes :

1. $(3x+2)(-6x-1) \geq (3x+2)^2$
2. $(2x-1)(-5x+7) < 4x^2 - 4x + 1$
3. $\frac{3x-4}{2x+3} \geq 0$
4. $\frac{1-4x}{x-3} < -4$

1.

$$\begin{aligned}(3x+2)(-6x-1) \geq (3x+2)^2 &\Leftrightarrow (3x+2)(-6x-1)-(3x+2)^2 \geq 0\\ &\Leftrightarrow (3x+2)(-6x-1-(3x+2)) \geq 0\\ &\Leftrightarrow (3x+2)(-9x-3) \geq 0\end{aligned}$$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$-9x-3$		$+$		$+$	0	$-$	
$(3x+2)(-9x-3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\boxed{S=\left[-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right]}$$

2.

$$\begin{aligned}(2x-1)(-5x+7) < 4x^2-4x+1 &\Leftrightarrow (2x-1)(-5x+7) < (2x-1)^2\\ &\Leftrightarrow (2x-1)(-5x+7)-(2x-1)^2 < 0\\ &\Leftrightarrow (2x-1)\big(-5x+7-(2x-1)\big) < 0\\ &\Leftrightarrow (2x-1)(-7x+8) < 0\end{aligned}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{8}{7}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(-7x+8)$		$+$		$+$	0	$-$	
$(2x-1)(-7x+8)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\boxed{S=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{8}{7};+\infty\right[}$$

3.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$3x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{3x-4}{2x+3}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$$\boxed{S=\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right[\cup\left[\frac{4}{3};+\infty\right[}$$

4.

$$\begin{aligned}\frac{1-4x}{x-3} < -4 &\Leftrightarrow \frac{1-4x}{x-3}+4 < 0\\ &\Leftrightarrow \frac{1-4x}{x-3}+\frac{4(x-3)}{x-3} < 0\\ &\Leftrightarrow \frac{1-4x+4x-12}{x-3} < 0\\ &\Leftrightarrow \frac{-11}{x-3} < 0\end{aligned}$$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	0	$+$	
$-\frac{11}{x-3}$		$-$	$\Vert$	$+$	

$$\boxed{S=\left]-\infty;3\right[}$$

B.2 Exercices d'entraînement

14 Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=mx+p$ dont on donne le tableau de signes ci-dessous.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

1. Le nombre m peut-il être égal à 0 ?
2. Peut-on comparer les nombres p et 2 ?
3. Comparer $-\frac{p}{m}$ et -1.
4. Établir le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

1. Si $m=0$, alors f est constante. Donc f ne change pas de signe.
   Or tableau de signes de f indique que f change de signe.
   Donc $m \neq 0$ (on peut même préciser $m>0$ d'après le tableau).
2. $p=f(0)$.
   Or $m>0$, donc f est croissante.
   Ansi : $-1<0 \Rightarrow f(-1)<f(0) \Rightarrow 0<f(0)$.
   Tout ce que l'on sait de p est donc que $p=f(0)>0$, mais on ne peut pas comparer p à 2.
3. L'expression algébrique d'une fonction affine est de la forme $mx+p$.
   $f(x)=0 \Leftrightarrow mx+p=0 \Leftrightarrow mx=-p \Leftrightarrow x=-\frac{p}{m}$.

Donc $-\frac{p}{m}$ est le zéro d'une fonction affine.
Or d'après le tableau, -1 est le zéro de f.
Donc $-\frac{p}{m} = -1$.

4.

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$

15

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$(-2x+1)(x-3)+25 = (-2x+11)(x+2)$$
2. En déduire les solutions de l'inéquation :
$$(-2x+1)(x-3) \geq -25$$

1.
$$\begin{aligned}(-2x+1)(x-3)+25 &= -2x^2+6x+x-3+25\\ &= -2x^2+7x+22\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}(-2x+11)(x+2) &= -2x^2-4x+11x+22\\ &= -2x^2+7x+22\end{aligned}$$
Donc $(-2x+1)(x-3)+25 = (-2x+11)(x+2)$.

2.
$$\begin{aligned}(-2x+1)(x-3) \geq -25 &\Leftrightarrow (-2x+1)(x-3)+25 \geq 0\\ &\Leftrightarrow (-2x+11)(x+2) \geq 0\end{aligned}$$
On dresse le tableau de signes de $(-2x+11)(x+2)$.

x	$-\infty$		-2		$\frac{11}{2}$		$+\infty$
$-2x+11$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(-2x+11)(x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $\boxed{S = \left[-2; \frac{11}{2}\right]}$.

16 Un étudiant a emprunté 1 000 € à ses parents. Il prévoit de rembourser 85 € par mois. On note x le nombre de mois écoulés depuis l'emprunt et $S(x)$ la somme restant à rembourser après x mois.

1. Donner une expression de $S(x)$.
2. Étudier le signe et les variations de la fonction S.
3. En déduire au bout de combien de mois l'étudiant aura payé sa dette.

1. $S(x) = 1\,000 - 85x = -85x + 1000$.
2. $S(x) = mx + p$ avec $m = -85$ et $p = 1000$.
$m > 0$, donc S est croissante sur $\mathbb{R}$.
$-\frac{p}{m} = -\frac{1000}{-85} = \frac{1000}{85} = \frac{200}{17}$.

x	$-\infty$		$\frac{200}{17}$		$+\infty$
$S(x)$		$+$	0	$-$	

3. $\frac{200}{17} \approx 11{,}7$.
Donc au bout de 12 mois, soit un an, l'étudiant aura remboursé ses parents.

B.3 Exercices d'approfondissement

17

1. Montrer qu'une fonction linéaire est une fonction impaire.
2. Montrer qu'une fonction constante est une fonction paire.
3. Démontrer les réciproques des deux propositions précédentes dans le cas de fonctions affines.

1. Soit f une fonction linéaire.
$f(x)$ est de la forme mx avec $m \in \mathbb{R}$.
$f(-x) = m \times (-x) = -mx = -f(x)$.
Donc f est impaire.
2. Soit f une fonction constante.
$f(x) = p$, avec $p \in \mathbb{R}$.
$f(-x) = p = f(x)$.
Donc f est paire.
3. Soit f une fonction affine. On a $f(x) = mx + p$, avec $m,p \in \mathbb{R}$.

- Si f est impaire, alors $f(-x) = -f(x)$. Or :

$$\begin{aligned} f(-x) = -f(x) &\Leftrightarrow m \times (-x) + p = -(mx + p) \\ &\Leftrightarrow -mx + p = -mx - p \\ &\Leftrightarrow p = -p \\ &\Leftrightarrow p = 0 \end{aligned}$$

  Donc f est linéaire.

- Si f est paire, alors $f(-x) = f(x)$. Or :

$$\begin{aligned} f(-x) = f(x) &\Leftrightarrow m \times (-x) + p = mx + p \\ &\Leftrightarrow -mx + p = mx + p \\ &\Leftrightarrow 2mx = 0 \end{aligned}$$

  Or $2mx = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si $m = 0$.
  Donc $m = 0$ et ainsi f est constante.