5 Pourcentages : proportions et évolutions

I Proportion, taux d'évolution.

I.1 Proportion.

Définition 5.1 – Calculer une proportion

La *proportion* d'une quantité V_1 par rapport à une autre quantité V_2 est le rapport $\frac{V_1}{V_2}$.
On peut exprimer cette proportion sous trois formes : **fraction**, **nombre décimal**, **pourcentage** :

$$\frac{10}{40} = 0{,}25 = 25\ \%$$

Exemple 5.1 :

Un paquet de biscuits a une masse totale de 140 g.
Il contient 91 g de riz complet, 27,3 g de sarrasin et 21,7 g de maïs.
Déterminer la proportion de chacun de ces ingrédients.

- $\frac{91}{140} = 0{,}65 = 65\%$.
- $\frac{27{,}3}{140} = 0{,}195 = 19{,}5\%$.
- $\frac{21{,}7}{140} = 0{,}155 = 15{,}5\%$.

Propriété 5.1 – Appliquer une proportion

« Prendre » P % d'une certaine quantité revient à la multiplier par $\frac{P}{100}$.

Exemple 5.2 :

Dans un lycée de 1614 élèves, les élèves de seconde représentent environ 29,49% des élèves.
Combien y a-t-il d'élèves de seconde dans ce lycée ?
$1614 \times \frac{29{,}49}{100} \approx 476$.
Donc il y a environ 476 élèves de seconde.

Exercices : A

I.2 Taux d'évolution.

a) Trouver un taux d'évolution.

Définition 5.2 – Taux d'évolution

Le taux d'évolution d'une quantité qui passe d'une valeur V_0 à une valeur V_1 est égal à :

$$t = \frac{V_1 - V_0}{V_0}$$

$V_1 - V_0$ est appelé variation **absolue** et $\frac{V_1 - V_0}{V_0}$ variation **relative**.

⚠ Le résultat obtenu n'est pas un pourcentage !
Pour exprimer le résultat en pourcentages, il suffit de multiplier le résultat par 100 (on décale la virgule de deux rangs vers la droite).
Ainsi, si on trouve par exemple $t = -0{,}15$, on pourra alors en conclure qu'il s'agit d'une diminution de 15%.

Remarque(s) :

- Cette formule peut se comprendre. $V_1 - V_0$ correspond à la variation de la quantité (> 0 si c'est une augmentation, < 0 si c'est une diminution). On cherche quelle proportion cette variation ($V_1 - V_0$) représente par rapport à la valeur initiale (V_0). On est donc ramené au calcul d'une proportion *(voir **Définition 5.1**)*.

Exemple 5.3 :

Le prix d'un produit est affiché à 66,5 €. La semaine précédente, il était affiché à 70 €. Calculer le taux d'évolution associé.
La valeur initiale V_0 est 70 et la valeur finale V_1 est 66,5 .
Ainsi : $t = \frac{66{,}5-70}{70} = -0{,}05 = -5\%$.

b) Appliquer un taux d'évolution.

Définition 5.3 – Coefficient multiplicateur

On appelle **coefficient multiplicateur** associé au taux d'évolution t, noté CM, le nombre par lequel il faut multiplier une quantité pour lui faire subir cette évolution, et :

$$CM = \mathbf{1 + t}$$

Exemple 5.4 :

Considérons une valeur de départ $V_0 = 40$.
Faire subir à cette valeur une diminution de 15%.
Le taux d'évolution associé à une diminution de 15% est $-0{,}15$.

Le coefficient multiplicateur associé est : $CM = 1 + t = 1 + (-0{,}15) = 0{,}85$.
Ainsi, la valeur après diminution est $40 \times 0{,}85$, soit 34.

Remarque(s) :

- si $CM > 1$ il s'agit d'une **augmentation**.
- si $0 < CM < 1$ il s'agit d'une **diminution**.

Propriété 5.2 – Retrouver le taux d'évolution à partir du CM

Soit CM le coefficient multiplicateur associé à une évolution .
Alors le taux d'évolution t, est égal à :

$$t = \mathbf{CM - 1}$$

Exemple 5.5 :

Quelle évolution subit une valeur si on la multiplie par :

1. 1,23? $1{,}23 - 1 = 0{,}23 = \boxed{23\%}$.
2. 0,64? $0{,}64 - 1 = -0{,}36 = \boxed{-36\%}$.

Exercices : B

II Évolutions successives.

Définition 5.4 – Taux d'évolution global

Lorsqu'une quantité subit n évolutions successives $t_1, t_2, \ldots t_n$, elle subit une évolution globale t_G.

Propriété 5.3 – Coefficient multiplicateur global

Soit t_G le taux d'évolution globale associé à n évolutions successives de coefficient multiplicateurs $CM_1, CM_2, \ldots, CM_n$.
On appelle coefficient multiplicateur global le coefficient multiplicateur associé à t_G et :

$$CM_G = \mathbf{CM_1 \times CM_2 \times \ldots \times CM_n}$$

Exemple 5.6 :

Le prix d'un objet augmente de 5%, puis encore de 8%.
De quel pourcentage a-t-il augmenté ?
$5\% = 0{,}05$ et $8\% = 0{,}08$.
$CM_1 = 1 + 0{,}05 = 1{,}05$ et $CM_2 = 1 + 0{,}08 = 1{,}08$.
$CM_G = CM_1 \times CM_2 = 1{,}05 \times 1{,}08 = 1{,}134$.
Ainsi : $t_G = CM_G - 1 = 1{,}134 - 1 = 0{,}134 = 13{,}4\%$.
Donc le prix a augmenté de 13,4%.

⚠ On voit bien dans l'exemple précédent qu'il ne faut pas ajouter les deux pourcentages !

Exercices : C

III Évolution réciproque.

Définition 5.5 – Taux d'évolution réciproque

Soit t le taux d'évolution de la valeur V_0 à V_1. On appelle **taux d'évolution réciproque** le taux d'évolution $\mathbf{t_R}$ de la valeur $\mathbf{V_1}$ à la valeur $\mathbf{V_0}$ (*on effectue le "chemin" inverse*).

Propriété 5.4 – Coefficient multiplicateur réciproque

Soit t_R le taux d'évolution réciproque associé à une évolution de coefficient multiplicateur CM.
On appelle coefficient multiplicateur réciproque le coefficient multiplicateur associé à t_R et :

$$CM_R = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{CM}}$$

⚠ Après une augmentation de 10%, effectuer une diminution de 10% ne ramène pas à la valeur de départ.
$1{,}1 \times 0{,}9 = 0{,}99$
$0{,}99 - 1 = -0{,}01 = -1\%$ $\rightarrow$ cela revient à effectuer une diminution de 1% !

Exemple 5.7 :

Lorsqu'une valeur subit une hausse de 26%, quelle évolution doit-elle subir pour revenir à sa valeur initiale ?
$26\% = 0{,}26$.
Le coefficient multiplicateur associé est $CM = 1 + 0{,}26 = 1{,}26$.
$CM_R = \frac{1}{CM} = \frac{1}{1{,}26} \approx 0{,}7937$.
Ainsi : $t_R = CM_R - 1 \approx 0{,}7937 - 1 = -0{,}2063 = -20{,}63\%$.
Donc il faut qu'elle subisse une diminution de environ 20,63%.

Exercices : D