4 Variations/signe d'une fonction

I Variations d'une fonction

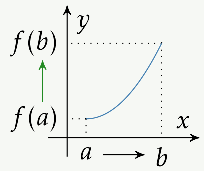
I.1 Définition

Définition 4.1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

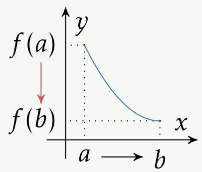
- f est **croissante** sur I si pour tous $a,b \in I$:

$a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$ (l'ordre est **conservé**)



- f est **décroissante** sur I si pour tous $a,b \in I$:

$a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$ (l'ordre est **inversé**)



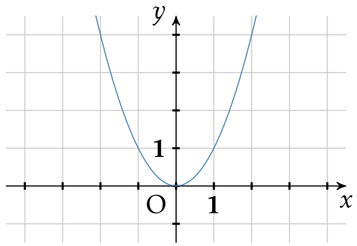
•Lorsque les inégalités sont strictes, on dit que f est **strictement croissante**, ou **strictement décroissante**.

Définition 4.2 – Monotonie

Une fonction f est dite **monotone** sur un intervalle I si elle est soit croissante sur I soit décroissante sur I.

Exemple 4.1 :

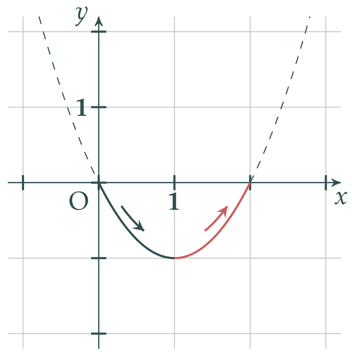
On a tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^2$.



1. f est-elle monotone sur $\mathbb{R}$?
   Non car elle est d'abord décroissante, puis croissante.
2. Sur quels intervalles f est-elle monotone ?
   f est monotone sur $]-\infty;0]$, intervalle sur lequel elle est décroissante, et sur $[0;+\infty[$, intervalle sur lequel elle est croissante.

Exemple 4.2 :

Sur l'écran de la calculatrice, tracer la courbe représentative de $f : x \mapsto x^2 - 2x$.
f semble-t-elle décroissante sur $[0;2]$? Le démontrer.
On trace sa courbe représentative à l'aide de la calculatrice ou d'un autre logiciel (GeoGebra par exemple).
On observe ceci :



On voit que f n'est pas décroissante sur $[0;2]$ (sous-entendu sur **tout l'intervalle**) car elle est croissante sur $[1;2]$.
Comment le démontrer ? Il suffit de choisir deux valeurs qui ne vérifient pas la définition d'une fonction décroissante.
À l'aide du graphique, nous savons que nous pouvons trouver un tel **contre-exemple** entre 1 et 2.
On a $f(1) = -1$ et $f(2) = 0$. Ainsi, $1 < 2$ mais $f(1) < f(2)$ (l'ordre n'est pas inversé), donc la fonction f n'est pas décroissante sur $[1;2]$.

I.2 Tableau de variations

Un tableau de variations est un moyen pratique de résumer les variations d'une fonction.

Définition 4.3 – Tableau de variations d'une fonction

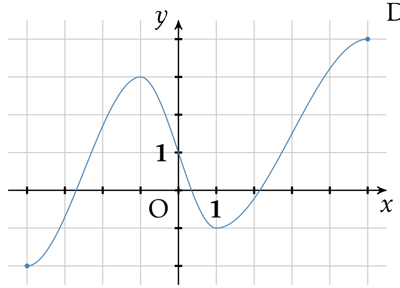
Un tableau de variations d'une fonction f est un tableau dans lequel on indique :

- sur la première ligne les bornes de l'ensemble de définition de f ainsi que les bornes des intervalles sur lesquels la fonction est monotone, rangées dans l'ordre croissant.

- sur la deuxième ligne les variations de la fonction sur chaque intervalle formé par les valeurs qui apparaissent sur la première ligne à l'aide d'une flèche descendante si la fonction est strictement décroissante, et d'une flèche ascendante si la fonction est strictement croissante sur cet intervalle.
- sous chaque valeur, aux extrémités des flèches, lorsque c'est possible, l'image de celle-ci par f.

Exemple 4.3 :

On a représenté ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f sur $[-4;5]$.



Dresser le tableau de variation de f.

x	-4		-1		1		5
$f(x)$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	4

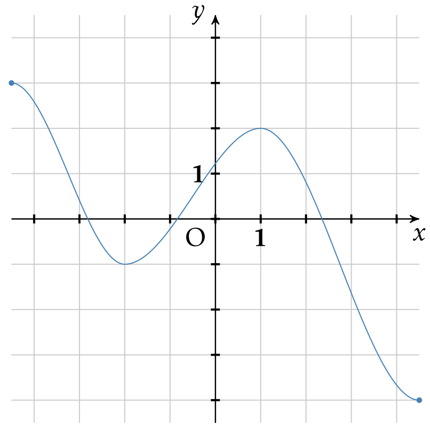
II Extremum

Définition 4.4

- On dit que $f(a)$ est le **maximum** de f sur I si pour tout $x \in I$: $f(a) \geq f(x)$.
- On dit que $f(a)$ est le **minimum** de f sur I si pour tout $x \in I$: $f(a) \leq f(x)$.

Exemple 4.4 :

Soit f une fonction définie sur $\left[-\frac{9}{2};\frac{9}{2}\right]$.
On donne ci-dessous sa courbe représentative ainsi que son tableau de variations.



x	$-\frac{9}{2}$		-2		1		$\frac{9}{2}$
$f(x)$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-4

1. Quel est le maximum de f sur $\left[-\frac{9}{2};\frac{9}{2}\right]$ et en quelle valeur est-il atteint ?
   Le maximum de f sur $\left[-\frac{9}{2};\frac{9}{2}\right]$ est 3, il est atteint en $-\frac{9}{2}$
2. Quel est le minimum de f sur $\left[-\frac{9}{2};\frac{9}{2}\right]$ et en quelle valeur est-il atteint ?
   Le minimum de f sur $\left[-\frac{9}{2};\frac{9}{2}\right]$ est -4, il est atteint en $\frac{9}{2}$
3. Quel est le minimum de f sur $\left[-\frac{9}{2};0\right]$ et en quelle valeur est-il atteint ?
   Le minimum de f sur $\left[-\frac{9}{2};0\right]$ est -1, il est atteint en -2
4. Quel est le maximum de f sur $\left[-3;\frac{9}{2}\right]$ et en quelle valeur est-il atteint ?
   Le tableau de variations seul ne permet pas de conclure. En effet, il ne permet que de dire que $f(-3) \in [-1;3]$ (autrement dit peut-être que $f(-3) > 2$).
   Mais en regardant $\mathcal{C}_f$, on voit que $f(-3) \in [0;1]$.
   On en conclue que le maximum de f sur $\left[-3;\frac{9}{2}\right]$ est 2, atteint en 1.

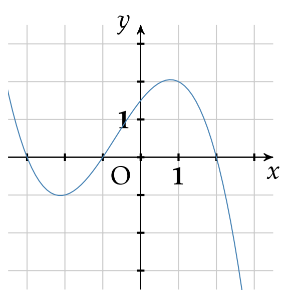
III Tableau de signes d'une fonction

Définition 4.5 – Tableau de signes

On appelle tableau de signes un tableau dans lequel on fait apparaître :

- sur la première ligne les valeurs de la variable : les deux bornes de l'ensemble de définition et les valeurs en lesquelles la fonction vaut 0.
- sur la deuxième ligne le signe de la fonction sur chaque intervalle à l'aide d'un signe – ou +, ainsi que des **0** sous les valeurs en lesquelles la fonction vaut 0.

Exemple 4.5 :



Dresser le tableau de signes de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe est tracée ci-contre.

x	$-\infty$		-3		-1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Exemple 4.6 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x+4)(2x-6)$.
Dresser le tableau de signes de f.
On étudie le signe de chacun des facteurs :

$$x+4>0 \Leftrightarrow x>-4$$

$$\begin{aligned} 2x-6>0 &\Leftrightarrow 2x>6 \\ &\Leftrightarrow x>3 \end{aligned}$$

On résume cela dans un tableau de signes puis on applique la règle des signes pour la multiplication afin d'avoir le signe de $f(x)$.

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-6$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+4)(2x-6)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$2(x+4)(2x-6)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	