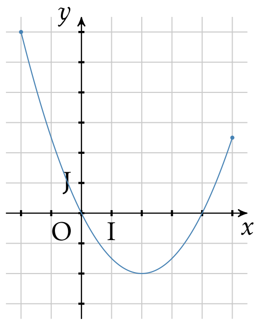
A Variations d'une fonction

A.1 Faire ses gammes

1 Soit f une fonction définie sur $[-2;5]$ dont on a tracé ci-dessous la courbe représentative.



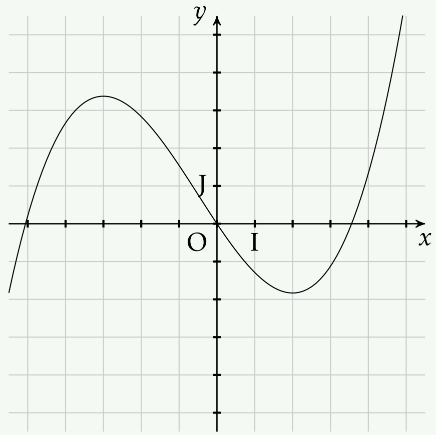
1. f est-elle monotone sur son ensemble de définition (i.e sur $[-2;5]$) ?
2. Sur quels intervalles est-elle monotone ?

f n'est pas monotone sur $[-2;5]$ car elle n'est pas exclusivement croissante ou exclusivement décroissante sur $[-2;5]$. En effet son sens de variation change en 2.
En revanche, on peut dire par exemple qu'elle est monotone et décroissante sur $[-2;2]$.
Elle est également monotone sur $]2;5]$, intervalle sur lequel elle est croissante.

2

Soit $f : x \mapsto \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{8} - \frac{3x}{2}$.

1. Tracer la courbe représentative de f sur l'écran de la calculatrice.
2. f est-elle monotone sur $\mathbb{R}$?
3. Sur quels intervalles est-elle monotone ?



f n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$ car elle n'est pas exclusivement croissante ou exclusivement décroissante sur $\mathbb{R}$.
En revanche, on peut dire par exemple qu'elle est monotone et décroissante sur $[-3;2]$.
Elle est également monotone sur $]-\infty;-3]$ et sur $[2;+\infty[$. Sur ces deux derniers intervalles, elle est croissante.

A.2 Exercices d'entraînement

3 **Interpréter un tableau de variations**

Soit f une fonction dont on a dressé le tableau de variations ci-dessous.

x	-3		-2		1		4
$f(x)$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	4	$\searrow$	-1

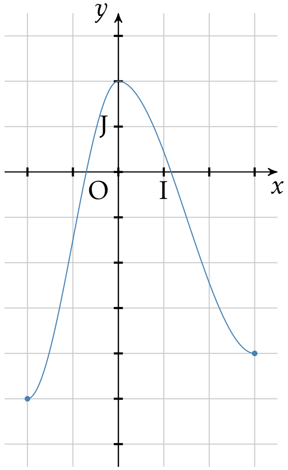
1. Sur quels intervalles f est-elle croissante ? Décroissante ?
2. Quelle est l'image de -2 par f ?
3. Donner un antécédent de 4 par f.

1. f est décroissante sur $[-3;-2]$ et sur $[1;4]$, et croissante sur $[-2;1]$.
2. On repère la valeur -2 sur la première ligne du tableau.
   La valeur associée sur la deuxième ligne est -3 .
   On en déduit que $f(-2) = -3$.
3. Un antécédent de 4 est 1.

4 **Dresser le tableau de variations d'une fonction**

Soit f une fonction définie sur $[-2;3]$.
On a tracé ci-contre sa courbe représentative.
Dresser le tableau de variations de f.

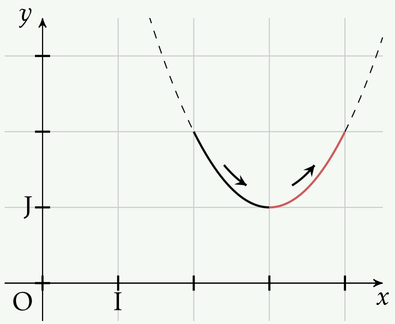
x	-2		0		3
$f(x)$	-5	$\nearrow$	2	$\searrow$	-4



5 Démontrer qu'une fonction n'est pas monotone

Sur l'écran de la calculatrice, tracer la courbe représentative de $f : x \mapsto (x-3)^2 + 1$.
f semble-t-elle décroissante sur $\mathbb{R}$? Le démontrer.

On trace sa courbe représentative à l'aide de la calculatrice ou d'un autre logiciel (GeoGebra par exemple).
On observe la courbe suivante :

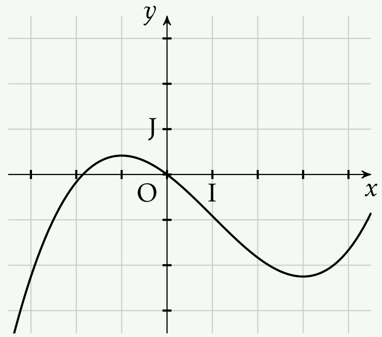


On voit que f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$ (sous-entendu sur **tout l'intervalle**) car elle est croissante sur $[3;+\infty[$.
Comment le démontrer ? Il suffit de choisir deux valeurs qui ne vérifient pas la définition d'une fonction décroissante.
À l'aide du graphique, nous savons que nous pouvons trouver un tel **contre-exemple** entre 3 et $+\infty$.
On a $f(3) = 1$ et $f(4) = 2$. Ainsi, $3 < 4$ mais $f(3) < f(4)$, donc la fonction f n'est pas décroissante sur $[3;+\infty[$.

6

Sur l'écran de la calculatrice, tracer la courbe représentative de $f : x \mapsto \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{4} - \frac{3x}{4}$.
f semble-t-elle croissante sur $\mathbb{R}$? Le démontrer.

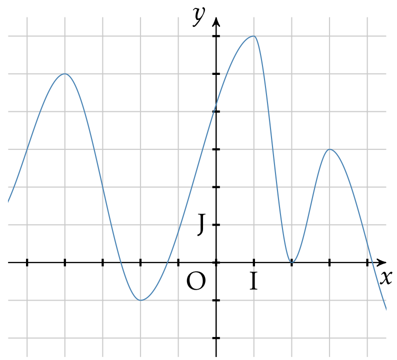
On trace sa courbe représentative à l'aide de la calculatrice ou d'un autre logiciel (GeoGebra par exemple).
On observe la courbe suivante :



On voit que f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$ (sous-entendu sur **tout l'intervalle**) car elle est décroissante sur $[-1;3]$.
Comment le démontrer ? Il suffit de choisir deux valeurs qui ne vérifient pas la définition d'une fonction décroissante.
À l'aide du graphique, nous savons que nous pouvons trouver un tel **contre-exemple** entre -1 et 3.
On a $f(-1) = \frac{5}{12}$ et $f(3) = -\frac{9}{4}$. Ainsi, $-1 < 3$ mais $f(-1) > f(3)$ (l'ordre n'est pas conservé), donc la fonction f n'est pas croissante sur $[-1;3]$. Par extension, elle n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.

7

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, et dont on donne ci-dessous la courbe représentative.
NB : Sur un tel graphique, on considère implicite que les variations de la fonction ne changent plus si on prolonge le graphique à gauche et/ou à droite.



1. Dresser le tableau de variations de f.
2. En justifiant, donner un encadrement de $f(-\frac{1}{2})$.

3. En justifiant, donner un encadrement de $f(-3)$.

1.

x	$-\infty$	-4	-2	1	2	3	$+\infty$
$f(x)$	↗	5	↘ -1 ↗	6	↘ 0 ↗	3	↘

2. $-\frac{1}{2} \in [-2;1]$.
Or f est strictement croissante sur $[-2;1]$, donc :

$$-2 < -\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow f(-2) < f(-\frac{1}{2}) < f(1)$$
$$\Rightarrow -1 < f(-\frac{1}{2}) < 6$$

3. $-3 \in [-4;-2]$.
Or f est strictement décroissante sur $[-4;-2]$.

$$-4 < -3 < -2 \Rightarrow f(-4) > f(-3) > f(-2)$$
$$\Rightarrow 5 > f(-3) > -1$$

8 On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-2	-1	2	3	$+\infty$
$f(x)$	↗	8	↘ 3 ↗	5	↘ -6 ↗	

Dans chacun des cas, *en justifiant*, dire si l'affirmation est VRAI ou FAUSSE.

1. $3 < f(0) < 5$. 2. $f(4) = -5$. 3. $f(-\frac{3}{2}) \in [3;8]$. 4. $f(\frac{5}{2}) < 5$.

1. VRAI.
f est strictement croissante sur $[-1;2]$, donc :

$$-1 < 0 < 2 \Rightarrow f(-1) < f(0) < f(2)$$
$$\Rightarrow 3 < f(0) < 5$$

2. f est strictement croissante sur $[3;+\infty[$ et $f(3) = -6$. Donc on ne peut qu'affirmer que $f(4) > -6$, le tableau ne permet pas de donner avec certitude la valeur de $f(4)$.
3. VRAI. $-\frac{3}{2} \in [-2;-1]$.
Or f est strictement décroissante sur $[-2;-1]$.
Donc :

$$-2 < -\frac{3}{2} < -1 \Rightarrow f(-2) > f\left(-\frac{3}{2}\right) > f(-1)$$
$$\Rightarrow 8 > f\left(-\frac{3}{2}\right) > 3$$
$$\Rightarrow f\left(-\frac{3}{2}\right) \in [3;8]$$

4. VRAI. $\frac{5}{2} \in [2;3]$.
Or f est strictement décroissante sur $[2;3]$.
Donc :

$$2 < \frac{5}{2} < 3 \Rightarrow f(2) > f\left(\frac{5}{2}\right) > f(D[0])$$
$$\Rightarrow 5 > f\left(\frac{5}{2}\right)$$

9

1. Décrire le sens de variation de la fonction k dont le tableau de variation est donné ci-contre.
2. Ranger du plus petit au plus grand :
   (a) $k(-0{,}5)$, $k(-0{,}6)$, $k(-\sqrt{2})$.
   (b) $k(\pi)$, $k(\sqrt{3})$, $k(3)$.

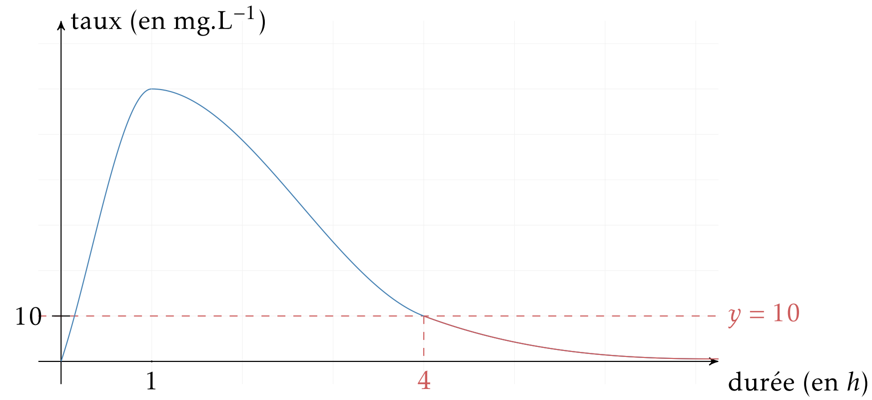
x	-10	0	10
$k(x)$	1	↘ 0 ↗	2

1. k est strictement décroissante sur $[-10;0]$ et strictement croissante sur $[0;10]$.
2. (a) $-10 < -\sqrt{2} < -0{,}6 < -0{,}5 < 0$. Or k est décroissante sur $[-10;0]$.
   Donc $k(-\sqrt{2}) > k(-0{,}6) > k(-0{,}5)$
   (b) $0 < \sqrt{3} < 3 < \pi < 10$. Or k est croissante sur $[0;10]$.
   Donc $k(\sqrt{3}) < k(3) < k(\pi)$.

B Extremums

10 Déterminer le maximum/minimum d'une fonction sur un intervalle

Le graphique ci-dessous représente le taux d'un médicament dans le sang en fonction de la durée, heures.
On note f la fonction qui au temps t associe de le taux du médicament dans le sang.



1. Dresser le tableau de variations de f sur $[0;6]$.
2. (a) Quel est la maximum de f sur $[0;6]$?
   (b) Pour quelle valeur de t est-il atteint ?
   (c) Interpréter par rapport au contexte.
3. (a) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(t) < 10$ pour $t > 1$.
   (b) Interpréter par rapport au contexte.

1.

x	0		1		6
$f(x)$	0	↗	60	↘	

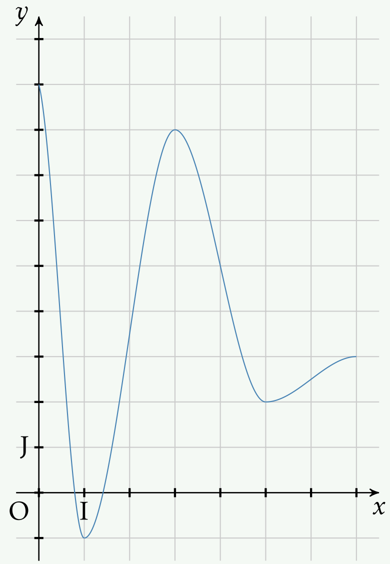
2. (a) Le maximum de f sur $[0;6]$ est 60.
   (b) Ce maximum est atteint pour $t = 1$.
   (c) Le taux de médicament dans le sang est maximal au bout de 1 h après la prise et il est alors de 60 mg.L^{-1}.
3. (a) Graphiquement, résoudre $f(t) < 10$ revient à regarder la partie de $\mathscr{C}_f$ située en dessous de la droite d'équation $y = 10$ (voir le graphique).
   Si on ne s'intéresse qu'aux valeurs de t supérieures à 1, alors $S = [4;6]$.
   On ne prend pas en compte la période pendant laquelle le taux augmente.
   Cela signifie qu'une fois le médicament ingéré, il faut attendre 4 heures pour que le taux devienne inférieur à 10 mg.L^{-1}.

11 On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur $[0;7]$.

x	0		1		3		5		7
$f(x)$	9	↘	-1	↗	8	↘	2	↗	3

1. f admet-elle un maximum ? Si oui, quelle est sa valeur et pour quelle valeur est-il atteint ?
2. f admet-elle un minimum ? Si oui, quelle est sa valeur et pour quelle valeur est-il atteint ?
3. Quel est le maximum de f sur $[1;4]$?
4. Quel est le minimum de f sur $[2;7]$?
5. Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction f à l'aide du tableau de variations.

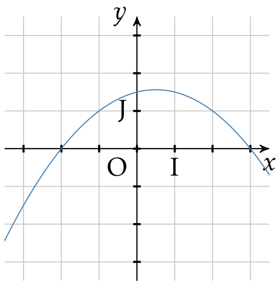
1. Le maximum de f est 9, il est atteint en 0.
2. Le minimum de f est -1 , il est atteint en 1 .
3. Le maximum de f sur $[1;4]$ est 8, atteint en 3 .
4. Sur $[2;7]$, on ne peut pas déterminer le minimum de f . En effet, on ne peut dire juste avec le tableau de variations la valeur de $f(2)$.
   On ne peut qu'affirmer que $f(2) \in [-1;8]$.



5.

C Signe d'une fonction

12 Dresser un tableau de signes



Dresser le tableau de signes de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe est tracée ci-contre.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

13

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2(3x-1)(x+5)$.

1. Étudier le signe de f sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$.

1.

$$3x - 1 > 0 \Leftrightarrow 3x > 1 \qquad\qquad x + 5 > 0 \Leftrightarrow x > -5$$
$$\Leftrightarrow x > \frac{1}{3}$$

x	$-\infty$		-5		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
-2		$-$		$-$		$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. On déduit du tableau de signes que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 0$ est $S = \left]-5; \frac{1}{3}\right[$.

14 Position relative de deux courbes

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 2$ et $g(x) = x + 1$.

1. Démontrer que $f(x) - g(x) = (x-1)(x+3)$.
2. Étudier le signe de $(x-1)(x+3)$.
3. En déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$. *Vérifier le résultat en traçant les courbes représentatives de f et f sur l'écran de la calculatrice.*

1.

$$f(x) - g(x) = x^2 + 3x - 2 - (x+1) \qquad (x-1)(x+3) = x^2 + 2x - 3$$
$$= x^2 + 2x - 3$$

Donc $f(x) - g(x) = (x-1)(x+3)$.

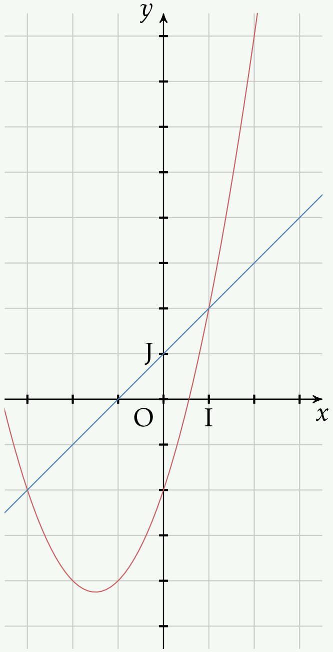
2. On étudie le signe de $(x+3)$ et de $(x-1)$.

$$x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3 \qquad\qquad x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

On résume cela dans un tableau de signes. On écrit une ligne pour chacune des expressions puis on applique la règle des signes pour la multiplication pour obtenir le signe de $(x-1)(x+3)$.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)(x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ si et seulement si $f(x) \geq g(x)$, autrement dit si et seulement si $f(x) - g(x) \geq 0$.
Ainsi on peut déduire du tableau de signes précédent que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $]-\infty;-3] \cup [1;+\infty[$, et au-dessous sur $[-3;1]$.
On peut vérifier ce résultat à l'écran de la calculatrice. $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont tracées ci-dessous respectivement en rouge et en bleu.



15 Soient f et g deux fonction définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2+x-3$ et $g(x) = x^2+2x-1$.

1. Démontrer que $f(x) - g(x) = (x-2)(x+1)$.
2. Étudier le signe de $(x-2)(x+1)$.
3. En déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$. *Vérifier le résultat en traçant les courbes représentatives de f et f sur l'écran de la calculatrice.*

1.

$$f(x) - g(x) = 2x^2 + x - 3 - \left(x^2 + 2x - 1\right) \qquad (x-2)(x+1) = x^2 - x - 2$$
$$= x^2 - x - 2$$

Donc $f(x) - g(x) = (x-2)(x+1)$.

2. On étudie le signe de $(x+1)$ et de $(x-2)$.

$$x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1 \qquad\qquad x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

On résume cela dans un tableau de signes. On écrit une ligne pour chacune des expressions puis on applique la règle des signes pour la multiplication pour obtenir le signe de $(x-2)(x+1)$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-2)(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ si et seulement si $f(x) \geq g(x)$, autrement dit si et seulement si $f(x) - g(x) \geq 0$.
Ainsi on peut déduire du tableau de signes précédent que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $]-\infty;-1] \cup [2;+\infty[$, et au-dessous sur $[-1;2]$.
On peut vérifier ce résultat à l'écran de la calculatrice. $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont tracées ci-dessous respectivement en rouge et en bleu.