3 Notion de vecteur

I Définition et propriétés

Définition 3.1 – Vecteur

La translation qui transforme un point A en un point B est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
On dit que A est l'origine du vecteur et B son extrémité. Il est défini par :

1. sa **direction** : celle de la droite (AB)
2. son **sens** : de A vers B
3. sa **norme** : $\|\overrightarrow{AB}\|$ ou AB

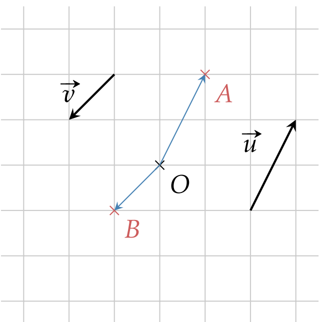
On le représente par une flèche.

Définition 3.2 – Vecteur nul

Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est dit vecteur nul. Il se note $\vec{0}$.

Exemple 3.1 :

Sur la figure ci-dessous, placer les points A et B, images respectives de O par les translations de vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

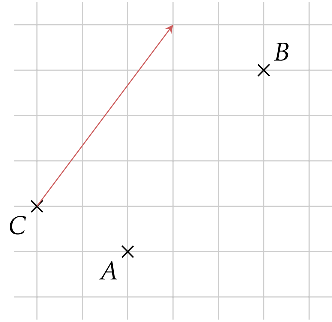


Définition 3.3 – Vecteurs égaux

Deux vecteurs égaux sont deux vecteurs qui ont la même **direction**, le même **sens**, et la même **norme**).

Exemple 3.2 :

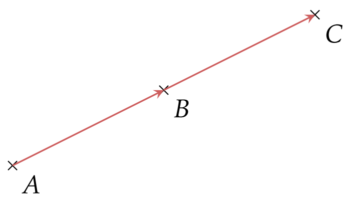
Tracer un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{AB}$, d'origine C.



Propriété 3.1 – Milieu

M est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.

Illustration

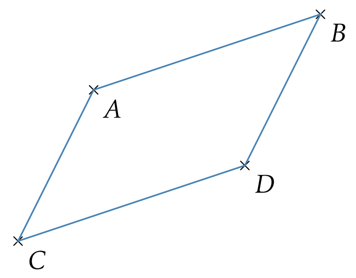


B est le milieu de $[AC]$.
On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.

Propriété 3.2 – Parallélogramme

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si **ABDC est un parallélogramme**.

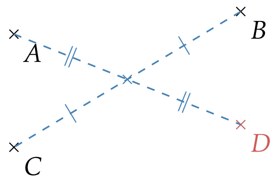
Illustration



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ sur la figure ci-contre.
C'est bien $ABDC$ qui est un parallélogramme, et non $ABCD$!

Exemple 3.3 :

Placer le point D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



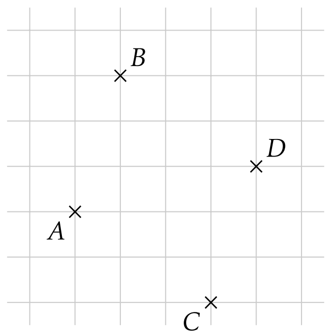
Définition 3.4 – Vecteurs opposés

Deux vecteurs opposés sont deux vecteurs qui ont même direction, même norme, mais qui sont de sens contraire (ou opposé).

On note $\overrightarrow{\mathbf{BA}} = -\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Exemple 3.4 :

Nommer deux vecteurs opposés.
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.



II Somme de vecteurs

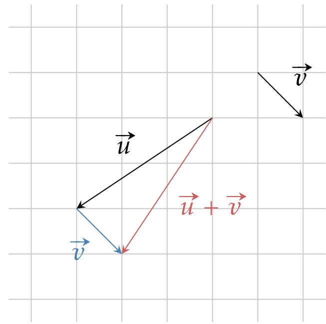
Propriété 3.3 – Relation de Chasles

Pour tous points A, B et C :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{\mathbf{AC}}.$$

Exemple 3.5 :

1. Tracer un représentant du vecteur $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.



2. Simplifier l'expression suivante : $-\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{AP}$.

$$\begin{aligned} -\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PA} \\ &= \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PA} \\ &= \overrightarrow{NA} \end{aligned}$$

Propriété 3.4 – Somme et parallélogramme

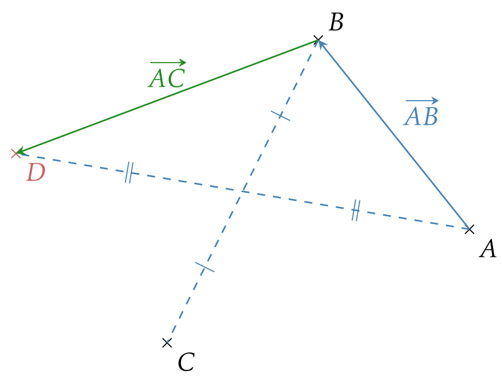
Pour tous points A, B, C et D :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{\mathbf{AD}}$ si et seulement si **ABDC est un parallélogramme**.

Exemple 3.6 :

Placer le point D tel que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow ABDC$ est un parallélogramme.



III Dans un repère

III.1 Coordonnées d'un vecteur

Définition 3.5

Dans un repère (O;I,J), les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ sont les coordonnées du point M tel que $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$.

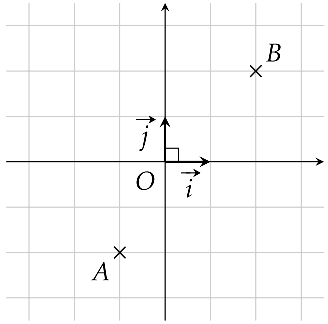
Propriété 3.5

Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$.
On note :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$$

Exemple 3.7 :

Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.



Propriété 3.6 – Coordonnées et vecteurs égaux

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si **ils ont les mêmes coordonnées**.

III.2 Coordonnées d'une somme

Propriété 3.7

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$.

Exemple 3.8 :

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ deux vecteurs dans un repère.
Déterminer les coordonnées du vecteur somme $\vec{u}+\vec{v}$.

$$\begin{aligned} \vec{u}+\vec{v} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+(-2) \\ 3+5 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$