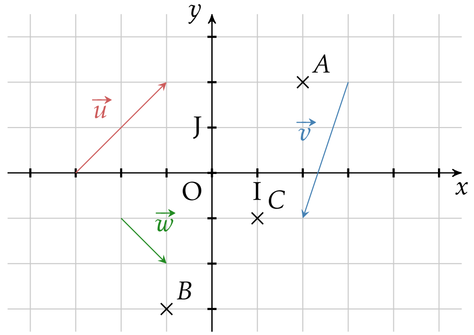
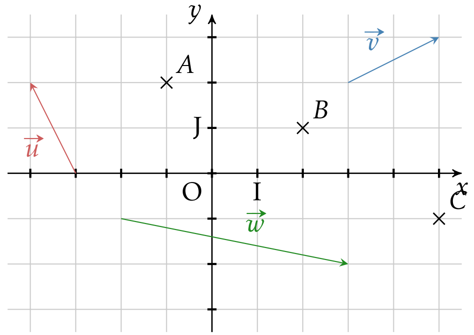
A Introduction

1 Sur la figure ci-dessous, placer les points A, B et C tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$.

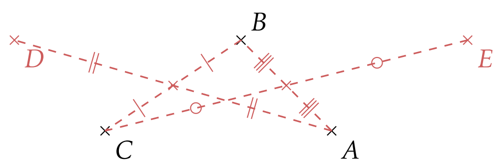


2 Sur la figure ci-dessous, placer les points A, B et C tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$.



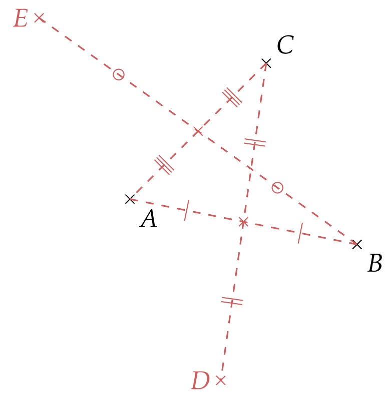
3 Placer les points D et E tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB}$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.
$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB}$ si et seulement si $AEBC$ est un parallélogramme.



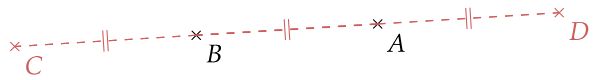
4 Placer les points D et E tels que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BA}$.

On place D et E de sorte que $BCAD$ et $CEAB$ soient des parallélogrammes.
On place d'abord le milieu de la première diagonale, puis on place le quatrième sommet de manière à ce que les diagonales se coupent en leur milieu.



5 Placer les points C et D tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ si et seulement si B est le milieu de $[AC]$.
Une fois C placé, on place D de sorte que A soit le milieu de $[BD]$.



6 Soit ABC un triangle quelconque. On note I le milieu de $[AB]$.

1. Construire la figure et construire le point I', image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
2. Construire le point A', image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{I'I}$.
3. Démontrer que $A'BCA$ est un parallélogramme.
4. En déduire que $\overrightarrow{A'I} = \overrightarrow{IC}$.

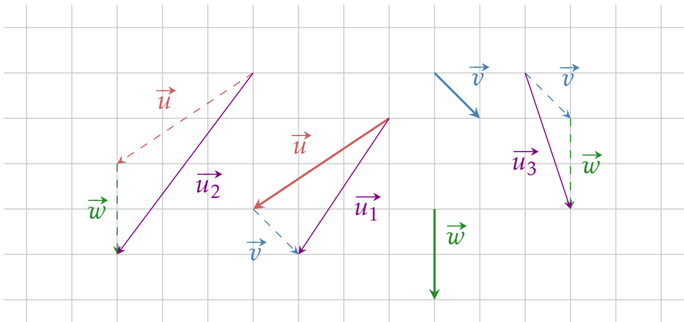
1.
2.
3. A' est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{I'I}$.
   Donc $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{I'I}$.
   Or on sait aussi que I' est l'image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$, soit $\overrightarrow{II'} = \overrightarrow{BC}$.
   $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{I'I} \Leftrightarrow \overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{II'}$.
   On a donc $\overrightarrow{II'} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{II'} = \overrightarrow{A'A}$.
   Donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A'A}$.
   On en déduit que $BCAA'$, aussi nommé $A'BCA$ est un parallélogramme.

4. $A'BCA$ est un parallélogramme, donc $[A'C]$ et $[AB]$ se coupent en leur milieu.
   Or I est le milieu de $[AB]$. Donc I est le milieu de $[A'C]$.
   On en déduit que $\overrightarrow{A'I} = \overrightarrow{IC}$.

B Somme de vecteurs

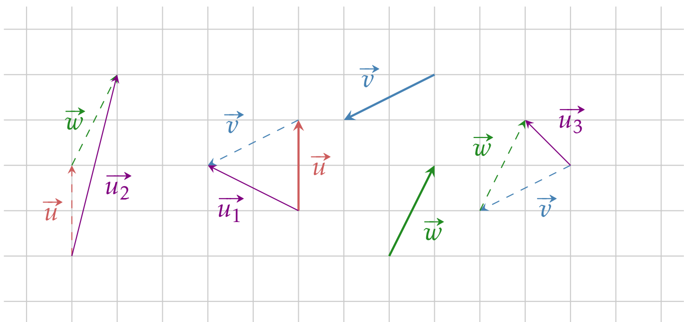
7 Tracer un représentant des vecteurs suivants :

1. $\vec{u_1} = \vec{u} + \vec{v}$.
2. $\vec{u_2} = \vec{u} + \vec{w}$.
3. $\vec{u_3} = \vec{v} + \vec{w}$.



8 Tracer un représentant des vecteurs suivants :

1. $\vec{u_1} = \vec{u} + \vec{v}$.
2. $\vec{u_2} = \vec{u} + \vec{w}$.
3. $\vec{u_3} = \vec{v} + \vec{w}$.

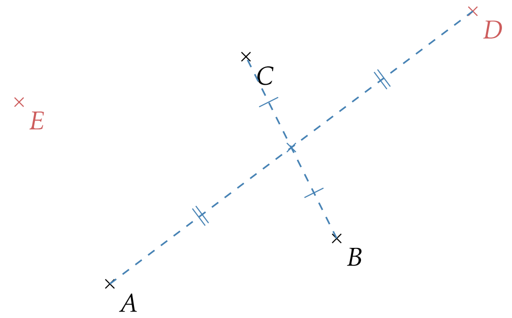


9 Soient ABCD un parallélogramme et I le milieu de [BC].

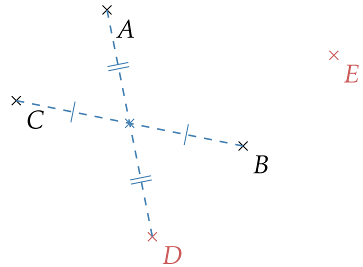
1. Construire la figure.
2. Construire le représentant d'origine B du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{CI}$.
3. À quel vecteur de la figure le vecteur $\vec{u}$ semble-t-il égal ?
4. Prouver cette conjecture

10 Placer les point D et E tels que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE}$.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.
Concrètement, lorsque les vecteurs sont représentés avec même origine, on peut les considérer comme côtés consécutifs d'un parallélogramme (à construire). Le vecteur somme a pour extrémité le quatrième sommet du parallélogramme.



11 Placer les point D et E tels que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CE}$.



12 On considère un objet soumis à trois forces qui se compensant, à savoir :

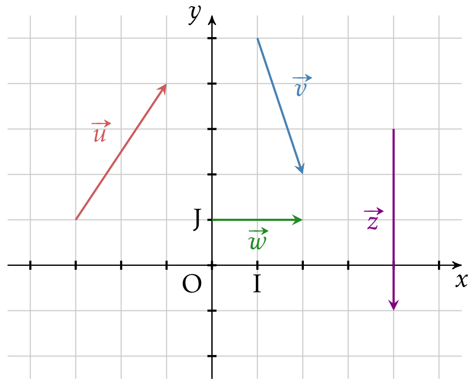
$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \vec{0}$$

On modélise cet objet par un point O.

1. Construire le point O ainsi que deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$, de directions différentes et non nulles.
2. Compléter le schéma en traçant le vecteur $\overrightarrow{F_3}$.

C Vecteurs dans un repère

13 Lire les coordonnées des vecteurs représentés ci-dessous.



14 Déterminer par le calcul les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$.
$A(-3;-1)$, $B(-2;2)$, $C(0;5)$, $D(2;4)$, $E(-1;-1)$, $F(1;1)$, $G(3;3)$, $H(4;1)$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-(-3) \\ 2-(-1) \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}.$$

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ 4-5 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}.$$

$$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} x_F - x_E \\ y_F - y_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(-1) \\ 1-(-1) \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}}.$$

$$\overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} x_H - x_G \\ y_H - y_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}.$$

15 Déterminer par le calcul les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$.
$A(1;2)$, $B(2;4)$, $C(-1;-1)$, $D(2;-2)$, $E(4;-1)$, $F(3;2)$, $G(-4;-1)$, $H(-3;3)$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}.$$

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-(-1) \\ -2-(-1) \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}}.$$

$$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} x_F - x_E \\ y_F - y_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-4 \\ 2-(-1) \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}}.$$

$$\overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} x_H - x_G \\ y_H - y_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-(-4) \\ 3-(-1) \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}}.$$

16 Dans chacun des cas, déterminer si ABCD est un parallélogramme.

1. $A(1;-2)$, $B(7,-2)$, $C(9,2)$ et $D(3;2)$.
2. $A(0;-2)$, $B(-1;1)$, $C(7;-4)$ et $D(6;-1)$.
3. $A(-3{,}06;-2{,}78)$, $B(-0{,}08;-5{,}84)$, $C(8{,}22;-3{,}08)$ et $D(5{,}1;0{,}3)$.
4. $A(2;-5)$, $B(13;-5)$, $C(9;3)$ et $D(-2;3)$.

$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

1. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-1 \\ -2-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-3 \\ 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc $ABCD$ est un parallélogramme.
2. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-0 \\ 1-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$
   $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-6 \\ -4-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.
   $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC}$, donc $ABCD$ n'est pas un parallélogramme.
3. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}08-(-3{,}06) \\ -5{,}84-(-2{,}78) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}98 \\ 3{,}08 \end{pmatrix}$
   $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8{,}22-5{,}1 \\ -3{,}08-0{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}12 \\ -3{,}38 \end{pmatrix}$.
   $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC}$ donc $ABCD$ n'est pas un parallélogramme.
4. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13-2 \\ -5-(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-(-2) \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, donc $ABCD$ est un parallélogramme.

17 Dans un repère, on donne les points :

$$A(-2;4),\ B(-3;5),\ C(4;6)$$

1. Déterminer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.
2. Quelles sont les coordonnées du point d'intersection des diagonales [AC] et [BD] ?
3. Calculer les coordonnées du point E tel que ABDE soit un parallélogramme.

1. $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_B - x_A = x_C - x_D \\ y_B - y_A = y_C - y_D \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -3-(-2) = 4 - x_D \\ 5-(-2) = 6 - y_D \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 5 \\ y_D = 5 \end{cases}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{D(5;5)}$.

2. $ABCD$ est un parallélogramme, donc ses diagonales se coupent en leur milieu.
Soit M le milieu de $[AC]$. On a :

$$\begin{aligned}\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_C}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_C}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{-2+4}{2} \\ y_M = \dfrac{4+6}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 1 \\ y_M = 5 \end{cases}\end{aligned}$$

3. $ABDE$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_B - x_A = x_D - x_E \\ y_B - y_A = y_D - y_E \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -3-(-2) = 5 - x_E \\ 5-4 = 5 - y_E \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 6 \\ y_E = 4 \end{cases}\end{aligned}$$

18 Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points $R(5;1)$, $S(2;-4)$, $T(-3;1)$, $U(1;4)$ et $V(3;5)$.
Calculer les coordonnées du point $W(x;y)$ telles que $\overrightarrow{VW} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{TU}$.

On calcule $\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{TU}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.

On en déduit $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{TU} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

Par ailleurs, on a $\overrightarrow{VW}\begin{pmatrix}x-3\\y-5\end{pmatrix}$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{VW} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{TU} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-3\\y-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = 1 \\ y-5 = -2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}\end{aligned}$$

On doit donc avoir $\boxed{W(4;3)}$.

19 On considère dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ les points suivants : $A(0;1)$, $B(-2;8)$, $C(-3;-4)$ et $D(-5;3)$.

1. Calculer les coordonnées de N tel que $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{CD}$.
2. Calculer les coordonnées de M telles que $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB}$.