2 Généralités sur les fonctions

Exercices : A.1

I Notion de fonction

I.1 Vocabulaire

Définition 2.1

Une fonction f définie sur D_f associe à chaque réel x de D_f un **unique** réel noté $f(x)$.

Définition 2.2 – Vocabulaire et notations

Vocabulaire	Notation
Ensemble de définition de f	D_f
Image de x par f	$f(x)$
Fonction f	f
Fonction qui à x associe $f(x)$	$f : x \mapsto f(x)$

Tout réel x de D_f tel que $f(x) = y$ est dit **antécédent** de y par f.
Schéma :

$$\underset{\text{antécédent}}{x} \overset{f}{\longmapsto} \underset{\text{image}}{f(x)}$$

Exemple 2.1 :

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

1. Quelle est l'image de 2 par f ?
   $f(2) = \dfrac{1}{2}$.
2. Donner un antécédent de 3 par f.
   $\dfrac{1}{3}$ est un antécédent de f car $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{\frac{1}{3}} = 1 \times 3 = 3$.
3. Quel est l'ensemble de définition de cette fonction ?
   $D_f =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ car $f(0)$ est impossible.

Exercices : A.2⟶A.3

I.2 Courbe représentative

Définition 2.3

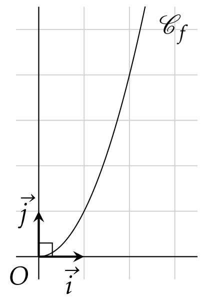
Dans un repère, la courbe représentative de f, notée $\mathscr{C}_f$, est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$, où x appartient à D_f.

Propriété 2.1

- Si $M(x;y) \in \mathscr{C}_f$, alors $x \in D_f$ et $y = f(x)$.
- Réciproquement : si $x \in D_f$ et $y = f(x)$, alors $M(x;y)$ appartient à $\mathscr{C}_f$.

Exemple 2.2 :

Soit $f : x \mapsto x^2$ la fonction définie sur $[0;+\infty[$ (on peut aussi dire : "soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x^2$").
Démontrer que le point $M(2;4)$ appartient à la $\mathscr{C}_f$.



$f(x_M) = f(2) = 2^2 = 4 = y_M$.
Donc le point $M(2;4)$ appartient à $\mathscr{C}_f$.

Exercices : B

I.3 Parité

Définition 2.4 – Parité

On dit qu'une fonction f est :

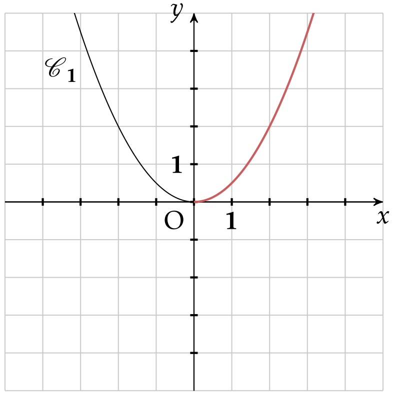
- **paire** si pour tout $x \in D_f$, $f(-x) = f(x)$.
- **impaire** si pour tout $x \in D_f$, $f(-x) = -f(x)$.

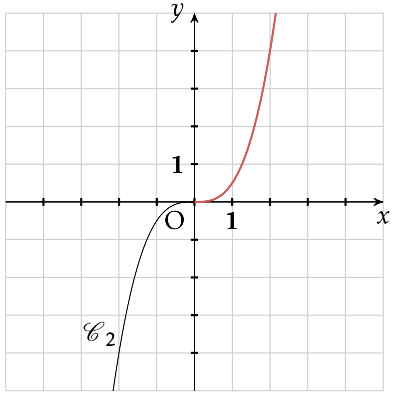
Propriété 2.2 – Parité et courbe représentative

- f est paire si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- f est impaire si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Exemple 2.3 :

1. Soient $f : x \mapsto x^2$, $g : x \mapsto x^3$ et $h : x \mapsto x+1$.
   (a) f est-elle paire ou impaire ?
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.
   Donc f est paire.
   (b) g est-elle paire ou impaire ?
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.
   Donc f est impaire.
   (c) h est-elle paire ou impaire ?
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -x+1$.
   Or $-x+1 \neq f(x)$ et $-x+1 \neq -f(x) = -x-1$.
   Donc f n'est ni paire, ni impaire.
2. Compléter $\mathscr{C}_1$ de manière à ce qu'elle soit la courbe représentative d'une fonction paire, et $\mathscr{C}_2$ de manière à ce qu'elle soit la courbe représentative d'une fonction impaire.





Exercices : C

II Résolutions graphiques

On sait résoudre des équations où x joue le rôle d'inconnue. On vient de voir que l'on peut voir une expression qui dépend de x comme une fonction, et qu'on peut représenter graphiquement cette fonction.
Cela nous amène au paragraphe suivant dans lequel nous allons chercher à appréhender les équations du point de vue graphique.

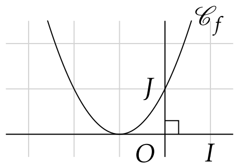
II.1 Équations de la forme $f(x) = k$ et $f(x) = g(x)$

Propriété 2.3

- Les solutions de l'équation $f(x) = k$ sont les abscisses des points d'ordonnée k de $\mathscr{C}_f$.
- Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{C}_g$.

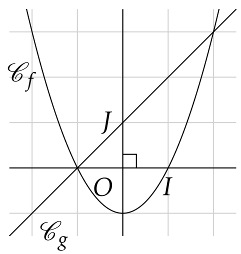
Exemple 2.4 :

1. Dans le repère $(O;I,J)$, on a tracé la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^2+2x+1$ ("f qui à x associe x^2+2x+1"). Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$, mais on n'en représente ici qu'une portion.
   Graphiquement, déterminer la ou les solution(s) de l'équation $x^2+2x+1 = 1$.



$S = \{-2;0\}$.

2. Dans le repère $(O;I,J)$, on a tracé les courbes représentatives des fonctions $f : x \mapsto x^2-1$ et $g : x \mapsto x+1$ définies sur $[-2{,}5;2{,}5]$.
   Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.



$S = \{-1;2\}$.

II.2 Inéquations de la forme $f(x) < k$ et $f(x) < g(x)$

Propriété 2.4

- Les solutions de l'inéquation $f(x) < k$ sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ d'ordonnée strictement inférieure à k.
- Les solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ situés en dessous de $\mathscr{C}_g$.

Exemple 2.5 :

1. En reprenant le graphique de l'exemple précédent, déterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 3$.
   $S =]-2;2[$.
2. Déterminer les solution de l'inéquation $x^2 - 1 \geq x + 1$ sur $[-2{,}5;2{,}5]$. $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $]-\infty;-1] \cup [2;+\infty[$ et en-dessous sur $[-1;2]$.
   On en déduit que $S = [-2{,}5;-1] \cup [2;2{,}5]$

Exercices : D