# A Introduction

## A.1 Découverte

1

**A. Effectuer des lectures graphiques**

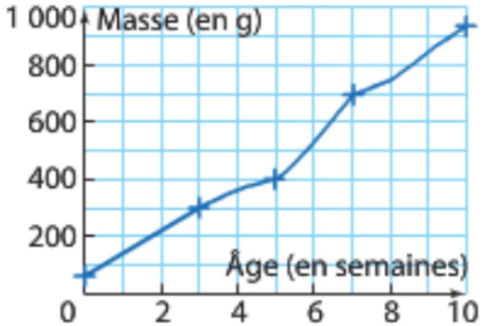
Un vétérinaire pèse un chaton chaque semaine; il a construit le graphique ci-contre.

(a) Recopier et compléter la phrase suivante :
" Le graphique représente l'évolution de la masse du chaton en fonction de ...".

(b) Lire la masse de ce châton à l'âge de trois semaines.

(c) Lire l'âge de ce châton lorsqu'il pesait :

- 400 g;
- 700 g.




**B. Comprendre le vocabulaire des fonctions**

$f$ est la fonction qui à chaque nombre associe le triple de ce nombre.

(a) Donner l'image de $-5$ par cette fonction.

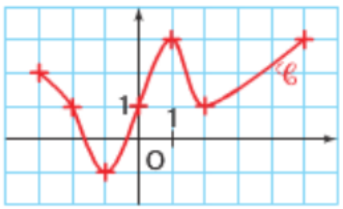
(b) Donner l'antécédent de 48 par cette fonction.

(c) Recopier et compléter :

- $f(0) = 0$
- $f\left(\frac{7}{3}\right) = 7$
- $f(-\frac{10}{9}) = -\frac{10}{3}$

**C. Utiliser une fonction définie par un graphique**

Soit $f$ une fonction dont la courbe représentative est donnée ci-contre.




(a) Expliquer pourquoi $f(1) = 3$.
Le point d'abscisse 1 appartenant à $\mathscr{C}_f$ a pour ordonnée 3.

(b) Traduire l'égalité précédente par une phrase comportant le mot "image".
1 est un antécédent de 3 par $f$.

(c) Lire graphiquement :

- l'image de 5 par $f$ ; $f(5) = 3$
- les antécédents de 1 par $f$. Les antécédent de 1 par $f$ sont $-2$, 0, et 2.

**D. Utiliser une fonction définie par un tableau**

Le tableau suivant définit une fonction E qui à chaque vitesse indiquée $v$ (en $m/s$) du vent associe l'énergie $E(v)$ (en $kWh$) produite par une petite éolienne en un an.

| $v$ (en $m/s$) | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $E(v)$ (en $kWh$) | 130 | 310 | 570 | 780 | 900 | 780 | 630 | 580 | 240 | 50 |

Déterminer :

- l'image de 7 ; $f(7) = 900$
- les antécédents de 780. 6 et 8

**E. Utiliser une fonction définie par une formule**

$g$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x(2x-3)$.

(a) Calculer l'image par la fonction $g$ de :

- $x = -5$
- $x = 0{,}1$

(b) Une personne affirme : "L'antécédent de 0 par la fonction $g$ est $\frac{3}{2}$". Qu'en pensez-vous ? Il faudrait dire "**Un** antécédent de 0 par $g$ est $\frac{3}{2}$, car 0 est aussi un antécédent de 0 par $g$.

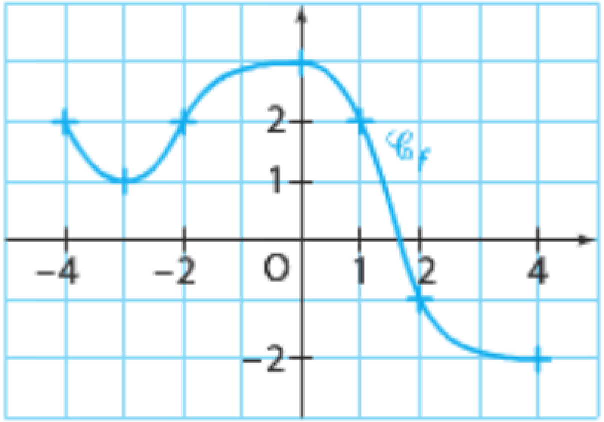
## A.2 Faire ses gammes

2 Soit $f$ la fonction qui à chaque nombre associe son double.

1. Déterminer $f(20)$ et $f\left(\frac{5}{4}\right)$.
2. Déterminer l'antécédent de 0,18 par $f$.

1. $f(20) = 2 \times 20 = 40$.
$f\left(\frac{5}{4}\right) = 2 \times \frac{5}{4} = \frac{5}{2}$.
2. $\frac{0{,}18}{2=0{,}09}$. On a bien $f(0{,}09) = 2 \times 0{,}09 = 0{,}18$.
Donc 0,09 est un antécédent de 0,18 par $f$.

3 Soit $f$ la fonction dont la courbe représentative est tracée ci-dessous.



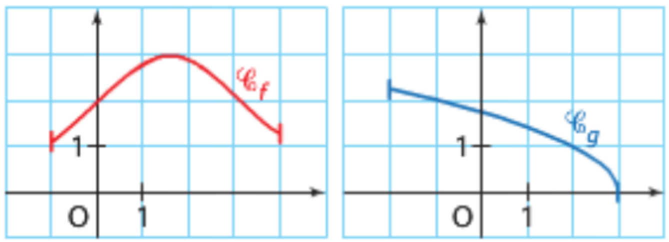

1. Lire graphiquement l'image de 2 par $f$.
2. Lire graphiquement $f(4)$.
3. Lire graphiquement les antécédents de 2 par $f$.
4. Reformuler les consignes des deux questions précédentes avec une phrase comportant le mot « image ».

1. $f(2) = -1$
2. $f(4) = -2$
3. Les antécédents de 2 par $f$ sont $-4$, $-2$ et 1.
4. « Lire graphiquement l'image de 4 par la fonction $f$ ».
   « Lire graphiquement les nombres dont l'image par $f$ est 2 ».

## A.3 Exercices d'entraînement

**4** Soient $f$ et $g$ deux fonctions dont les courbes représentatives sont tracées ci-dessous.

1. Lire les ensembles de définition de $f$ et $g$.




2. Une personne affirme : "$g(1) > f(1)$". A-t-elle raison ? Expliquer.

1. $\mathcal{D}_f = [-1;4]$ et $\mathcal{D}_g = [-2;3]$.
2. $f(1) > 2$ et $g(1) < 2$, donc $f(1) > g(2)$. Cette personne a donc tort.

**5** Soit $G$ la fonction qui à chaque nombre associe le carré de son triple.

1. Exprimer $G(x)$ en fonction de $x$.
2. Une personne affirme : "$-1$ a pour image 9 par la fonction $G$". A-t-elle raison ? Justifier.

1. $G(x) = (3x)^2 = 3^2 \times x^2 = 9x^2$.
2. $G(-1) = 9 \times (-1)^2 = 9 \times 1 = 9$. Donc cette personne a raison.

## B Courbe représentative

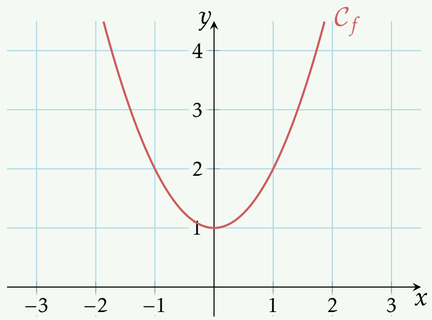
**6** Soit $f : x \mapsto x^2 + 1$.

1. Dresser le tableau de valeurs de la fonction $f$ entre $-3,5$ et $3,5$ avec un pas de 0,5.
2. Dans un repère, placer les points associés.
3. En déduire une allure de $\mathcal{C}_f$.

1.

| $x$ | $-3$ | $-2,5$ | $-2$ | $-1,5$ | $-1$ | $-0,5$ | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 10 | 7,25 | 5 | 3,25 | 2 | 1,25 | 1 | 1,25 | 2 | 3,25 | 5 | 7,25 | 10 |

2.
3.




**7** Soit $f : x \mapsto \cos(x)$.

1. Dresser le tableau de valeurs de la fonction $f$ entre $-2\pi$ et $2\pi$ avec un pas de $\frac{\pi}{4}$. On arrondira à 0,01 près si nécessaire.

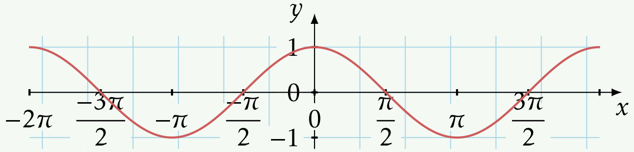
2. Dans un repère, placer les points associés puis en déduire une allure de $\mathcal{C}_f$.

1.

| $x$ | $-2\pi$ | $-\frac{7\pi}{4}$ | $-\frac{3\pi}{2}$ | $-\frac{5\pi}{4}$ | $-\pi$ | $-\frac{3\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 0,71 | 0 | −0,71 | −1 | −0,71 | 0 | 0,71 | 1 |

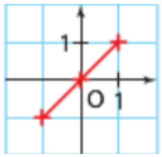
| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\pi$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 0,71 | 0 | −0,71 | −1 | −0,71 | 0 | 0,71 | 1 |

2.




**8** Soit $h$ la fonction définie sur l'intervalle $[-1;1]$ par $h(x) = x^3$.

1. À l'aide de la calculatrice, dresser le tableau de valeurs de $h$ avec un pas de 0,5 entre −1 et 1.
2. Un élève a tenté de tracer ci-contre la courbe représentative de $h$.
   Comment le convaincre qu'il se trompe ?




1.

| $x$ | $-1$ | $-0,5$ | $0$ | $0,5$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | −1 | −0,125 | 0 | 0,125 | 1 |

2. D'après la question précédente, le point de coordonnées $(-0,5;-0,125)$ doit appartenir à $\mathcal{C}_h$. Or il n'appartient pas à la courbe tracée.

**9** $g$ est la fonction définie sur l'intervalle $[-2;5]$ par $g(x) = x^2 - 4x$.

1. En vous aidant de la calculatrice, dresser le tableau de valeurs de $g$ avec un pas de 0,2 entre −2 et 0.
2. Dans chaque cas, dire si le point appartient à la courbe représentative de $g$. *Justifier.*

   (a) $A(-1,8;10,44)$ (b) $B(-0,6;2,76)$ (c) $C(-1,2;6,26)$ (d) $D(-1;5,2)$.
3. Dans chaque cas, dire si le point appartient à la courbe de $g$. *Justifier.*

   (a) $M(0,7;-2,3)$ (b) $N(3,48;-1,81)$ (c) $P(4,05;0,2)$

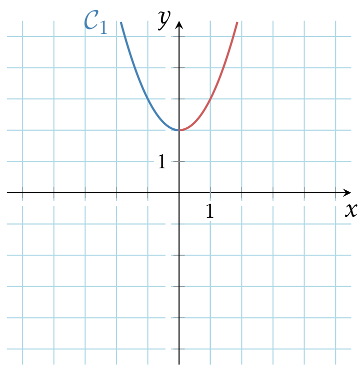
1.

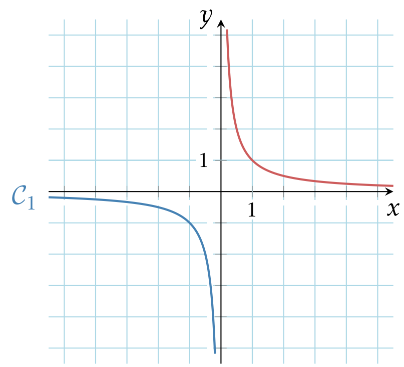
| $x$ | $-2$ | $-1,8$ | $-1,6$ | $-1,4$ | $-1,2$ | $-1$ | $-0,8$ | $-0,6$ | $-0,4$ | $-0,2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 12 | 10,44 | 8,96 | 7,56 | 6,24 | 5 | 3,84 | 2,76 | 1,76 | 0,84 |

2. (a) $g(x_A) = g(-1,8) = 10,44 = y_A$, donc $A \in \mathcal{C}_g$.
   (b) $g(x_B) = g(-0,6) = 2,76 = y_B$, donc $B \in \mathcal{C}_g$.
   (c) $g(x_C) = g(-1,2) = 6,24 \neq y_C$, donc $C \notin \mathcal{C}_g$.
   (d) $g(x_D) = g(-1) = 5 \neq y_D$, donc $D \notin \mathcal{C}_g$.
3. (a) $g(x_M) = g(0,7) = -2,31 \neq y_M$, donc $M \notin \mathcal{C}_g$.
   (b) $g(x_N) = g(3,48) = -1,8096 \neq y_N$, donc $N \notin \mathcal{C}_g$.
   (c) $g(x_P) = g(4,05) = 0,2025 \neq y_P$, donc $P \notin \mathcal{C}_g$.

## C Parité

**10** Compléter $\mathscr{C}_1$ de manière à ce qu'elle soit la courbe représentative d'une fonction paire, et $\mathscr{C}_2$ de manière à ce qu'elle soit la courbe représentative d'une fonction impaire.




**11** **Parité**

Dans chaque cas, déterminer la parité de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = x^3 - 1$
2. $f(x) = x^2 + 1$
3. $f(x) = 2x - 4x^3$
4. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
5. $f(x) = -5x^2 + 3x^4$
6. $f(x) = (x+5)^2$

1. $f(-x) = (-x)^3 - 1 = -x^3 - 1 \neq f(x)$. Donc $f$ n'est pas paire.
   $-f(x) = -(x^3 - 1) = -x^3 + 1 \neq f(-x)$, donc $f$ n'est pas impaire non plus.
2. $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$. Donc $f$ est paire.

3. $f(-x) = 2\times(-x) - 4\times(-x)^3 = -2x - 4\times(-x^3) = -2x + 4x^3 = -\left(2x - 4x^3\right) = -f(x)$.
   Donc $f$ est impaire.
4. $f(-x) = \sqrt{(-x)^2+1} = \sqrt{x^2+1} = f(x)$. Donc $f$ est paire.
5. $f(-x) = -5\times(-x)^2 + 3\times(-x)^4 = -5x^2 + 3x^4 = f(x)$.
   Donc $f$ est paire.
6. $f(-x) = (-x+5)^2 = (-x)^2 + 2\times(-x)\times 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$.
   Or $f(x) = (x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$.
   Donc $f(-x) \neq f(x)$.
   Donc $f$ n'est pas paire.
   $-f(x) = -(x+5)^2 = -\left(x^2+10x+25\right) = -x^2 - 10x - 25 \neq f(-x)$.
   Donc $f$ n'est pas impaire.

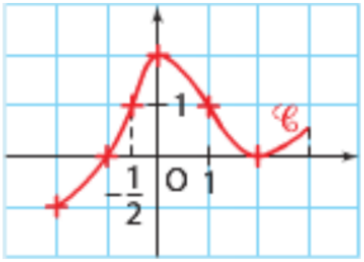
## D Résolutions graphiques

### D.1 Faire ses gammes

12

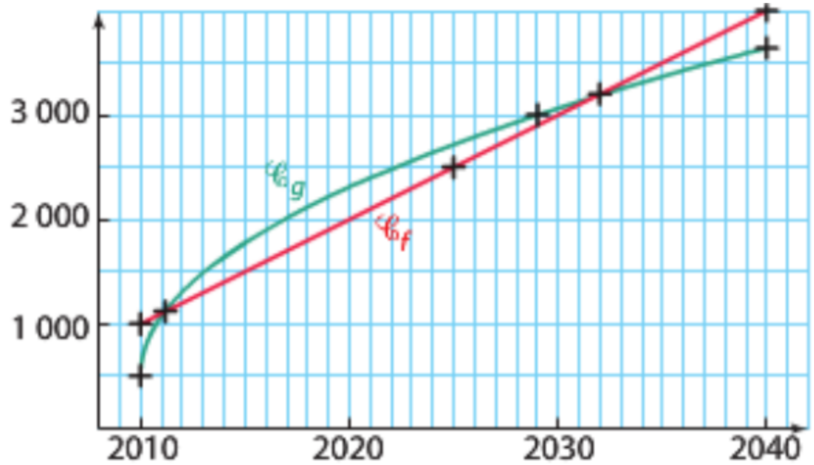
Soit $f$ la fonction dont la courbe représentative est tracée ci-contre.

1. Quel est l'ensemble de définition de $f$ ?
2. Résoudre graphiquement les équations :
   (a) $f(x) = 0$ (b) $f(x) = 1$
   (c) $f(x) = 2$




1. $\mathcal{D}_f = [-2;3]$.
2. (a) $S = \{-1;2\}$.
   (b) $S = \left\{-\frac{1}{2};1\right\}$.
   (c) $S = \{0\}$.

13 Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ci-dessous indiquent l'évolution des salaires mensuels en euros de Personne A et de Personne B d'année en année. Elles représentent les deux fonctions "salaires" $f$ et $g$.




1. Indiquer la légende à écrire sur chaque axe.
2. Lire l'ensemble de définition des fonctions $f$ et $g$.
3. Résoudre graphiquement les équations :
   (a) $f(t) = 2500$ (b) $g(t) = 3000$ (c) $f(t) = g(t)$.

   Interpréter les réponses.
4. Résoudre graphiquement $f(t) \geq 2500$ et interpréter la réponse.

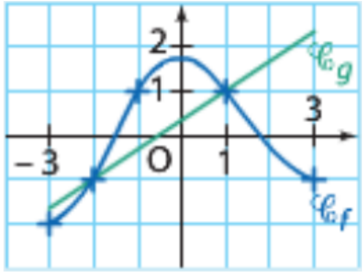
1. On lit en abscisse le « temps en années », et en ordonnée le « salaire mensuel en euros ».
2. $\mathcal{D}_f = [2010;2040] = \mathcal{D}_g$.
3. (a) $S = \{2025\}$. Le salaire mensuel de la personne $A$ est de 2 500 € en 2025.
   (b) $S = \{2029\}$. Le salaire de la personne $B$ est de 3 000 € en 2029.
   (c) $S = \{2011;2032\}$. La personne $A$ et la personne $B$ ont le même salaire en 2011 et en 2032.
4. $S = [2025;2040]$. Le salaire de la personne $A$ est supérieur ou égal à 2 500 € entre 2025 et 2040.

### D.2 Exercices d'entraînement

14

Soient $f$ et $g$ deux fonctions dont les courbes représentatives sont tracées ci-contre.
Résoudre graphiquement :

1. $f(x) = g(x)$
2. $f(x) > g(x)$
3. $f(x) \geq g(x)$

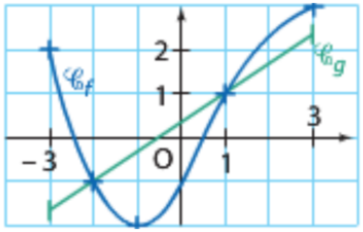



1. $S = \{-2;1\}$.
2. $S = ]-2;1[$.
3. $S = [-2;1]$.

15

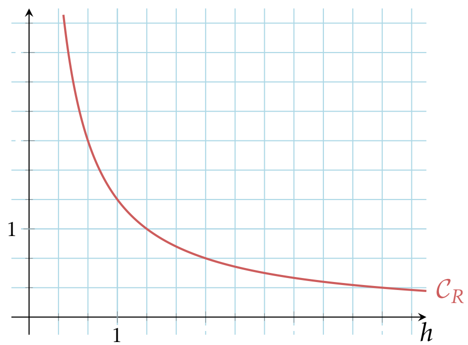
Soient $f$ et $g$ deux fonctions dont les courbes représentatives sont tracées ci-contre.
Résoudre graphiquement :

1. $f(x) \geq g(x)$
2. $f(x) > g(x)$
3. $f(x) \leq g(x)$




1. $S = \{-2;1\}$.
2. $S = [-3;-2[ \cup ]1;3]$.
3. $S = [-3;-2] \cup [1;3]$.

16 On considère une boule de rayon 1 située dans un cylindre de rayon 1 et de hauteur variable $h$.
On note leurs volumes respectifs $V_B$ et $V_C$.
La courbe ci-dessous représente le rapport $R(h) = \frac{V_B}{V_C}$ en fonction de $h$.




1. Pour quelle valeur de $h$ a-t-on $R(h) = 1$ ? Interpréter le résultat en rapport avec $V_B$ et $V_C$.
2. (a) Quelle doit être la valeur de $h$ pour que le cylindre arrive exactement à la hauteur de la boule ?
   (b) En déduire qu'on a alors $V_B = \frac{2}{3}V_C$.

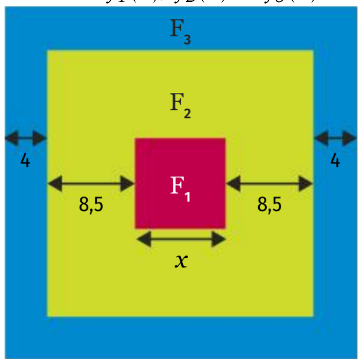
1. $R(h) = 1$ pour $h = \frac{4}{3}$.
2. (a) Il faut que sa hauteur soit égale à deux fois le rayon de la boule.
   $2 \times r = 2 \times 1 = 2$.
   (b) $R(2) = \frac{2}{3}$.

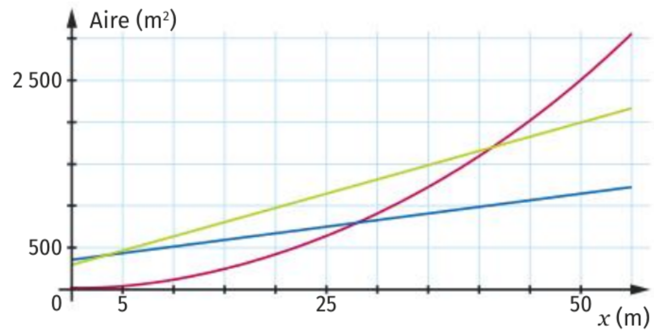
$$R(2) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{V_B}{V_C} = \frac{2}{3}$$
$$\Leftrightarrow V_B = \frac{2}{3}V_C$$

NB : On sait que $V_C = \text{base} \times \text{hauteur} = \pi \times r^2 \times h = \pi r^2 \times 2r = 2\pi r^3$.
D'où $V_B = \frac{2}{3} \times 2\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$

## 17 Synthèse

Un paysagiste souhaite planter trois types de fleurs $F_1$, $F_2$ et $F_3$ dans des carrés concentriques dont les dimensions sont données dans la figure ci-dessous.
On note $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x)$ les trois aires correspondantes en fonction de $x$.




1. L'ensemble ne doit pas dépasser 80 m de large : à quel intervalle appartient $x$ ?
2. Démontrer que $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = 34x + 289$ et $f_3(x) = 16x + 336$.
3. Ci-dessus, on a tracé dans un repère orthogonal les courbes représentatives des fonctions $f_1$, $f_2$ et $f_3$ sur $[0;55]$.
   (a) Calculer les images de 0 par ces trois fonctions puis associer chaque fonction à sa courbe.
   (b) Le paysagiste souhaite planter 1 200 $m^2$ de fleurs $F_1$ : déterminer graphiquement l'aire des autres fleurs.

4. (a) Résoudre algébriquement $f_2(x) = f_3(x)$ puis interpréter.
   (b) Résoudre graphiquement $f_1(x) = f_3(x)$.
   Comment vérifier le résultat par le calcul ?
   (c) Pour quelle valeur de $x$ l'aire du terrain contenant les fleurs $F_1$ est-elle identique à l'aire du terrain contenant les fleurs $F_2$ ?

1. $2 \times 4 + 2 \times 8{,}5 = 25$.
   $80 - 25 = 55$, donc pour que l'ensemble ne dépasse pas 80 m de large, on doit avoir $x \in [0;55]$.
2. $f_1(x) = x \times x = x^2$.
   $f_2(x) = (x+17)^2 - x^2 = x^2 + 34x + 289 - x^2 = 34x + 289$.
   $f_3(x) = (x+25)^2 - f_2(x) - f_1(x) = x^2 + 50x + 625 - 34x - 289 - x^2 = 16x + 336$.
3. (a) $f_1(0) = 0^2 = 0$.
   $f_2(0) = 34 \times 0 + 289 = 289$.
   $f_3(0) = 16 \times 0 + 336 = 336$.
   Ainsi, $\mathscr{C}_{f_1}$ est la courbe passant par l'origine.
   $\mathscr{C}_{f_3}$ est la courbe ayant la plus grand ordonnée à l'origine.
   $\mathscr{C}_{f_2}$ est la dernière courbe.
   (b) Graphiquement, on trouve que $f_1(x) = 1200$ pour $x \approx 35$.
   On lit alors $f_2(35) \approx 1500$ et $f_3(x) \approx 900$.
4. (a)

$$\begin{aligned} f_2(x) = f_3(x) &\Leftrightarrow 34x + 289 = 16x + 336 \\ &\Leftrightarrow 34x - 16x = 336 - 289 \\ &\Leftrightarrow 18x = 47 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{47}{18} \end{aligned}$$

   $\frac{47}{18} \approx 2{,}6111$.
   Donc les parterres $F_2$ et $F_3$ ont la même aire lorsque $x$ vaut $\frac{47}{18}$, soit environ 2,61 mètres.
   (b) On trouve $x \approx 28$.
   $f_1(28) = 28^2 = 784$ et $f_3(28) = 16 \times 28 + 336 = 448 + 336 = 784$.
   On a bien $f_1(28) = f_3(28)$.
   (c) Pour $x \approx 41$.