1 Repérage et configurations dans le plan

I Milieu d'un segment, distance entre deux points

I.1 Milieu d'un segment

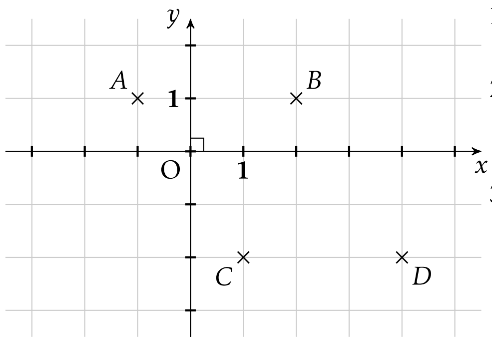
Exercices : A.1 · 1

Propriété 1.1 – Coordonnées du milieu d'un segment

Dans tout repère $(O;I,J)$ les coordonnées du point M, milieu du segment $[AB]$ sont :

$$M\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

Exemple 1.1 :



1. Déterminer les coordonnées des points A, B, C et D.
2. Déterminer les coordonnées de I_1 milieu du segment $[AD]$ et de I_2 milieu du segment $[BC]$.
3. En déduire la nature du quadrilatère ABDC.

1. $A(-1;1)$, $B(2;1)$, $C(1;-2)$, et $D(4;-2)$.
2.
   - $x_{I_1}=\frac{x_A+x_D}{2}=\frac{-1+4}{2}=\frac{3}{2}$; $y_{I_1}=\frac{y_A+y_D}{2}=\frac{1+1}{2}=-\frac{1}{2}$. Donc $I_1(\frac{3}{2};-\frac{1}{2})$.
   - $x_{I_2}=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$; $y_{I_2}=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{1-2}{2}=-\frac{1}{2}$. Donc $I_2(\frac{3}{2};-\frac{1}{2})$.
3. I_1 et I_2 ont les mêmes coordonnées donc les diagonales $[AD]$ et $[BC]$ se coupent en leur milieu, donc ABDC est un parallélogramme.

I.2 Distance entre deux points

Exercices : A.1 · 2

Propriété 1.2 – Distance entre deux points dans un repère orthonormé

Dans un repère orthonormé, la distance entre deux points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ est :

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

Exemple 1.2 :

Soient $A(3;6)$, $B(1;4)$ et $C(4;1)$.

1. Sous quelle condition le triangle ABC est-il rectangle en B ?
   $AB^2+BC^2=AC^2$ (réciproque du théorème de Pythagore).
2. Démontrer que ABC est rectangle en B.
   $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(1-3)^2+(4-6)^2}=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.
   $BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(4-1)^2+(1-4)^2}=\sqrt{3^2+(-3)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.
   $AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(4-3)^2+(1-6)^2}=\sqrt{1^2+(-5)^2}=\sqrt{26}$.
   Ainsi : $AB^2+BC^2=8+18=26=AC^2$.
   Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

Exercices : A

II Applications

II.1 Alignement de points

Propriété 1.3 – Points alignés

Soients A, B et C trois points distincts du plan.

A, B et C sont alignés **si** $AC=AB+BC$

Exemple 1.3 :

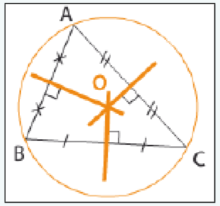
Démontrer que les points $A(-2;-3)$, $B(3;0)$ et $C(18;9)$ sont alignés.
$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(3-(-2))^2+(0-(-3))^2}=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$.
$BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(18-3)^2+(9-0)^2}=\sqrt{15^2+9^2}=\sqrt{306}=3\sqrt{34}$.
$AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(18-(-2))^2+(9-(-3))^2}=\sqrt{20^2+12^2}=\sqrt{544}=4\sqrt{34}$.
Ainsi : $AB+BC=\sqrt{34}+3\sqrt{34}=4\sqrt{34}=AC$.

Donc les points A, B et C sont alignés.

II.2 Médiatrices et cercle circonscrit

Propriété 1.4 – Cercle circonscrit

Les **médiatrices** des côtés d'un triangle sont concourantes en O, *centre de son cercle circonscrit*.



Rappel La médiatrice d'un segment $[AB]$ est la droite qui le coupe **perpendiculairement** en son **milieu**. C'est aussi l'ensemble des points situés à égale distance de A et de B.

Exemple 1.4 :

Dans un repère orthonormé, soient les points :
$O(1;2)$; $A(1;4)$; $B(3;2)$; $C\left(2;2-\sqrt{3}\right)$.

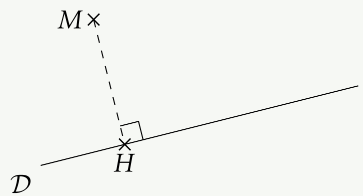
1. Démontrer que O est le point d'intersection des médiatrices de [AB], [BC] et [AC].
   Après calculs, on trouve $AO = BO = 2$. Donc O appartient à la médiatrice de [AB].
   $CO = BO$, donc O appartient à la médiatrice de [BC].
   $CO = AO$, donc O appartient à la médiatrice de [AC].
   Donc O est est le point d'intersection des trois médiatrices de ABC.
2. Que peut-on en déduire pour les points A, B et C ?
   On en déduit que les points A, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon $AO = BO = CO$.
3. En déduire l'aire du cercle passant par les points A, B et C. *On considère le mètre comme unité.*
   On en déduit que le cercle passant par A, B et C a pour rayon $2\ m$. Soit $\mathcal{A}$ son aire.
   On a : $\mathcal{A} = \pi \times r^2 = \pi \times 2^2 = 4\pi \approx 12.57 m^2$

II.3 Projeté orthogonal, aire d'un triangle

a) Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Définition 1.1 – Projeté orthogonal

Soit $\mathcal{D}$ une droite et M un point tel que $M \notin \mathcal{D}$.
On dit que H est le **projeté orthogonal** de M sur $\mathcal{D}$ lorsque $H \in \mathcal{D}$ et $(MH) \perp \mathcal{D}$.



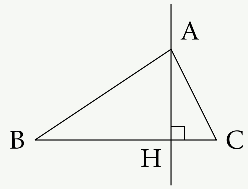
Remarque(s) :

- Le projeté orthogonal H d'un point M sur une droite $\mathcal{D}$ est le point de $\mathcal{D}$ le plus proche de M.
  MH est alors la distance entre M et la droite $\mathcal{D}$.

b) Hauteur et aire d'un triangle

Définition 1.2 – Hauteur

Dans un triangle ABC, la hauteur issue de A est la droite (AH), où H est le projeté orthogonal de A sur (BC).



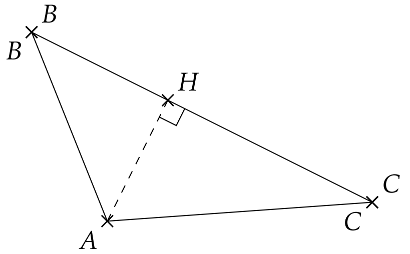
N.B : H s'appelle aussi le **pied** de la hauteur issue de A, et $[BC]$ est alors appelé **base** du triangle.

Rappel La hauteur d'un triangle permet de calculer son aire $\mathcal{A}$. Initialement, la hauteur issue de A est une droite, mais on emploie aussi ce terme pour désigner la longueur du segment $[AH]$. On a alors :

$$\mathcal{A} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$$

Exemple 1.5 :

On cherche à calculer l'aire du triangle ABC ci-dessous.
On suppose que l'on est dans un repère orthonormé dans lequel on a $A(-2;-1)$, $B(-3;1{,}5)$ et $C(1{,}5;-0{,}75)$.



1. Placer le point H, pied de la hauteur issue de A.
2. On suppose que le point H a pour coordonnées $H(-1{,}2;0{,}6)$. Calculer l'aire du triangle ABC.
   Soit $\mathcal{A}$ l'aire du triangle ABC.
   $\mathcal{A} = \frac{\text{base}\times\text{hauteur}}{2} = \frac{BC\times AH}{2}$.
   Or : $BC = \sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2} = \sqrt{(1{,}5-(-3))^2+(-0{,}75-1{,}5)^2} = \sqrt{4{,}5^2+(-2{,}25)^2} = \sqrt{25{,}3125}$
   $AH = \sqrt{(x_H-x_A)^2+(y_H-y_A)^2} = \sqrt{(-1{,}2-(-2))^2+(0{,}6-(-1))^2} = \sqrt{0{,}8^2+1{,}6^2} = \sqrt{3{,}2}$.
   Ainsi : $\boxed{\mathcal{A} = \frac{\sqrt{25{,}3125}\times\sqrt{3{,}2}}{2} = 4{,}5}$

Remarque(s) :

- L'aire obtenue est exprimés en unités d'aire, que l'on n'indique pas en mathématiques. Celle-ci est à déterminer dans un contexte plus concret (e.g (*exempli gratia*) physique, architecture etc). Si par exemple toutes les longueurs étaient exprimées en mètres, nous aurions une surface exprimés en m^2.

II.4 Trigonométrie : calcul de longueurs et d'angles

Définition 1.3 – Cosinus, sinus et tangente d'un angle

Soit α un angle dans un triangle rectangle.

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypothénuse}} \qquad \sin(\alpha) = \frac{\text{opposé}}{\text{hypothénuse}} \qquad \tan(\alpha) = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}$$

Remarque(s) :

- Un moyen mnémotechnique connu pour les retenir : "sohcahtoa". On retient la prononciation et on sait alors que pour la respecter, les lettres "soh" (pour le sinus) et "cah" (pour le cosinus) sont forcément dans cet ordre.

Propriété 1.5

Si α est la mesure d'un angle aigu dans un triangle rectangle, alors :

$$\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha) = 1$$

Démonstration

$\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha) = \left(\frac{\text{adj}}{\text{hyp}}\right)^2 + \left(\frac{\text{opp}}{\text{hyp}}\right)^2 = \frac{\text{adj}^2+\text{opp}^2}{\text{hyp}^2}$

Or dans un triangle rectangle, $\text{adj}^2+\text{opp}^2 = \text{hyp}^2$.

Donc : $\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha) = \frac{\text{hyp}^2}{\text{hyp}^2} = 1$. □

Exemple 1.6 :

Soit ABC un triangle tel que : $AB = 3$; $BC = 4$ et $AC = 5$.

1. Démontrer que ABC est rectangle en B.
   $AC^2 = 5^2 = 25$.
   $AB^2+BC^2 = 3^2+4^2 = 9+16 = 25$.
   Donc $AC^2 = AB^2+BC^2$. Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.
2. En déduire la mesure des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACB}$ à 0,01° près, de trois manières différentes : en utilisant le cosinus d'abord, puis le sinus et enfin la tangente.
   On sait donc déjà que $\widehat{ABC} = 90°$.
   $\cos\widehat{BAC} = \frac{adj}{hyp} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5}$.
   Lorsque l'on connaît le cosinus ou le sinus d'un angle, il suffit d'utiliser la fonction réciproque arccos ou arcsin pour retrouver l'angle.
   Ainsi : $\widehat{BAC} = \arccos\left(\frac{3}{5}\right) \approx 53{,}13°$.
   Dans un triangle, la somme des angles vaut 180°.
   Donc : $\widehat{BCA} \approx 180-(90+53{,}13) = 180-143{,}13 = 36{,}87°$.

Exercices : B