A Milieu d'un segment et distance entre deux points

A.1 Découverte

1 Milieu d'un segment

1. Dans un repère $(O;I,J)$, placer les points $A(2;3)$, $B(6;1)$ et $C(1;-3)$.
2. (a) Lire les coordonnées des points M, N et P, milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.
   (b) Quelle relation existe-t-il entre les coordonnées de M et celles de A et B? Vérifier qu'il existe une relation similaire pour les points N et P.
3. Déterminer les coordonnées du point Z, milieu du segment $[UV]$, avec $U(54;-9)$ et $V(298;79)$.

2 Distance entre deux points

1. Dans un repère **orthonormé** $(O;I,J)$, placer les points $A(1;1)$, $B(5;4)$ et $C(5;1)$.
2. Quelle est la distance AC ? Exprimer celle-ci en fonction de x_A et x_B, **abscisses** des points A et B.
3. Quelle est la distance BC ? Exprimer celle-ci en fonction de y_A et y_B, **ordonnées** des points A et B.
4. (a) Quelle est la nature de ABC ? Cela aurait-il été le cas dans un repère quelconque ?
   (b) En déduire la distance AB, ainsi que son expression en fonction de x_A, x_B, y_A et y_B.

A.2 Faire ses gammes

3 Dans chacun des cas, placer les points dans un repère orthonormé, puis calculer les coordonnées du milieu I du segment formé par les deux points indiqués.
On pourra vérifier la cohérence entre les résultats obtenus et le graphique.

1. $A(-4;3)$ et $F(6;6)$.
2. $H(5;1)$ et $F(-2;5)$.
3. $E(2;-3)$ et $B(6;1)$.
4. $E(1;2)$ et $F(-3;-1)$.
5. $A(-3;4)$ et $M(-3;6)$.

4 Dans chacun des cas, placer les points dans un repère orthonormé, puis calculer les coordonnées du milieu I du segment formé par les deux points indiqués.
On pourra vérifier la cohérence entre les résultats obtenus et le graphique.

1. $E(1;-2)$ et $D(-6;0)$.
2. $E(2;4)$ et $M(-5;-4)$.
3. $H(4;5)$ et $M(-2;-5)$.
4. $H(5;-1)$ et $D(5;5)$.
5. $E(2;0)$ et $D(2;4)$.

5 Soient $A(1;4)$, $B(-3;2)$ et $C(-6;-7)$ dans un repère orthonormé $(O;I,J)$.
Placer les points A, B et C, puis déterminer la distance entre chaque point.

A.3 Exercices d'entraînement

6 Dans chacun des cas, déterminer si le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

1. $A(-3;2)$, $B(-4;-2)$, $C(1;-5)$ et $D(2;-1)$.
2. $A(-4;2)$, $B(-3;-4)$, $C(3;-5)$ et $D(2;-1)$.
3. $A(5;4)$, $B(-5;0)$, $C(-14;-12)$ et $D(-4;-10)$.
4. $A(-8;-14)$, $B(2;-4)$, $C(14;0)$ et $D(4;-10)$.

7 Soient $A(10;-4)$, $B(10;6)$ et $C(6;-2)$. Démontrer que ABC est rectangle en C.

8 Soient $A(-4;-1)$, $B(-5;1)$ et $C(0;1)$. Démontrer que ABC est rectangle en A.

B Applications

B.1 Exercices d'entraînement

9 Soient $A(-3;2)$, $B(4;-2)$ et $C(11;-6)$.

1. Placer les points dans un repère orthonormé.
2. Déterminer si les points A, B et C sont alignés.

10 Soient $A(15;25)$, $B(20;18)$ et $C(17;22)$.
Déterminer si les points A, B et C sont alignés.

11 Soient $M(7;6)$,$N(6;1)$et $P(1;6)$ trois points.
On cherche à calculer l'aire du disque qui passe par ces 3 points.

1. Placer ces trois points dans un repère orthonormé.
2. Par construction, placer le centre du cercle passant par M, N et P.
3. Comment s'appelle ce cercle ?
4. Vérifier par le calcul que le centre du cercle a pour coordonnées $(4;4)$.
5. En déduire l'aire du disque passant par M, N et P.

12 Soient $A(-1;2)$, $B(-1;-4)$ et $C(2;2)$.

1. Placer les point A, B et C dans un repère orthonormé.
2. On cherche à calculer la distance entre le point A et la droite (BC).
   (a) Placer le point H, projeté orthogonal de A sur (BC). *Laisser les traits de construction apparents.*

(b) On suppose que le point H a pour coordonnées $H(\frac{7}{5};0{,}8)$.
En déduire la distance entre A et (BC).

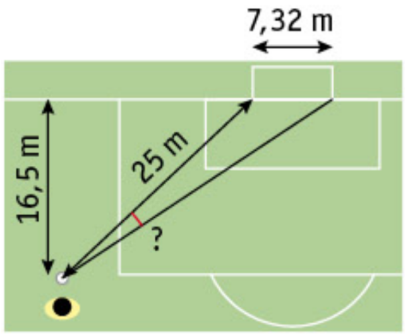
13 On cherche à calculer l'aire du triangle ABC ci-dessous.
On suppose que l'on est dans un repère orthonormé dans lequel on a $A(3;2)$, $B(-3;-3{,}5)$ et $C(1{,}5;-1{,}25)$.

1. Tracer le triangle ABC dans un repère orthonormé.
2. Placer le point H, projeté orthogonal de A sur (BC).
3. On suppose que le point H a pour coordonnées $H(4;0)$. Calculer l'aire du triangle ABC.

14 Soient $A(-1;3)$, $B(3;6)$ et $C(3;3)$.

1. Démontrer que ABC est rectangle et préciser en quel sommet.
2. En déduire l'hypothénuse de ABC.
3. Calculer la valeur de $\widehat{BAC}$ de trois manières différentes, en utilisant son cosinus, puis son sinus, et enfin sa tangente.
4. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

15 Sur un terrain, une footballeuse se trouve à 16,50 m de la ligne de but et à 25 m du poteau de but le plus proche.



La largeur d'un but est égale à 7,32 m.
Déterminer l'angle de tir de la footballeuse. *On arrondira la mesure au degré près.*

16 On munit le plan d'un repère orthonormé $(O;I,J)$ d'unité 2 cm.
Soient $A(2;1)$, $B(5;1)$, $C(5;-2)$ et $D(2;-2)$.

1. Faire une figure.
2. (a) Déterminer les coordonnées de K, milieu de $[AC]$.
   (b) Déterminer les coordonnées de L, milieu de $[BC]$.
   (c) En déduire que $ABCD$ est un parallélogramme.
3. (a) Calculer AC, AD et DC.
   (b) En déduire la nature du triangle ADC.
4. Conclure sur la nature du parallélogramme $ABCD$.

B.2 Exercices d'approfondissement

17 Soient $A(-2;1)$ et $B(4;3)$.

1. Calculer les coordonnées de K, milieu de $[AB]$.
2. Soit $M(x_M;y_M)$ un point du cercle de diamètre $[AB]$.
   (a) Faire une figure représentant la situation.
   (b) Conjecturer la nature du triangle ABM.
3. (a) Démontrer que $AB = 2KM$.
   (b) En déduire AB^2 en fonction de x_M et y_M.
   (c) Exprimer $AM^2 + BM^2$ en fonction de x_M et y_M.
   (d) Conclure

18 Soit JKL un triangle et H le projeté orthogonal de K sur (JL).

1. Faire un schéma représentant la situation.
2. En utilisant les notations de l'énoncé, quelle formule permet de calculer l'aire de JKL?
3. Démontrer que $KH = JK \times \sin\left(\widehat{LJK}\right)$.
4. En déduire une nouvelle expression de l'aire de JKL qui ne fait pas intervenir la hauteur.
5. Calculer l'aire de ABC tel que $AB = 6$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = 30°$.