1 Repérage et configurations dans le plan

I Milieu d'un segment, distance entre deux points

I.1 Milieu d'un segment

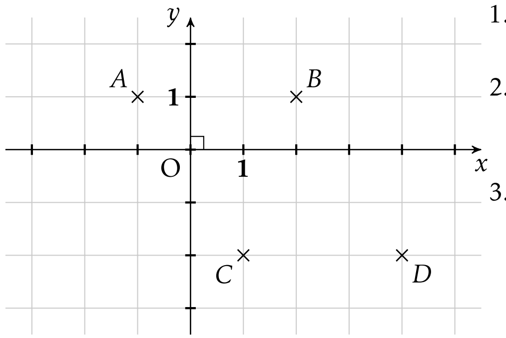
Exercices : A.1 · 1

Propriété 1.1 – Coordonnées du milieu d'un segment

Dans tout repère $(O;I,J)$ les coordonnées du point M, milieu du segment $[AB]$ sont :

$$M\big(\ldots\ldots;\ \ldots\ldots\big)$$

Exemple 1.1 :



1. Déterminer les coordonnées des points A, B, C et D.
2. Déterminer les coordonnées de I_1 milieu du segment $[AD]$ et de I_2 milieu du segment $[BC]$.
3. En déduire la nature du quadrilatère ABDC.

1.

2. •

   •

3.

I.2 Distance entre deux points

Exercices : A.1 · 2

Propriété 1.2 – Distance entre deux points dans un repère orthonormé

Dans un repère orthonormé, la distance entre deux points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ est :

$$AB = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple 1.2 :

Soient $A(3;6)$, $B(1;4)$ et $C(4;1)$.

1. Sous quelle condition le triangle ABC est-il rectangle en B ?
2. Démontrer que ABC est rectangle en B.

Exercices : A

II Applications

II.1 Alignement de points

Propriété 1.3 – Points alignés

Soient A, B et C trois points distincts du plan.

A, B et C sont alignés **si** ....

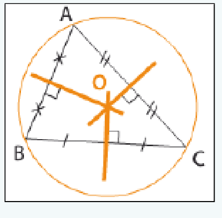
Exemple 1.3 :

Démontrer que les points $A(-2;-3)$, $B(3;0)$ et $C(18;9)$ sont alignés.

II.2 Médiatrices et cercle circonscrit

Propriété 1.4 – Cercle circonscrit

Les ______________ des côtés d'un triangle sont concourantes en O, *centre de son cercle circonscrit.*



Rappel La médiatrice d'un segment $[AB]$ est la droite qui le coupe __________ ______________ en son ________ . C'est aussi l'ensemble des points situés à égale distance de A et de B.

Exemple 1.4 :

Dans un repère orthonormé, soient les points :
$O(1;2)$; $A(1;4)$; $B(3;2)$; $C\left(2;2-\sqrt{3}\right)$.

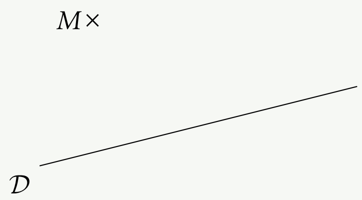
1. Démontrer que O est le point d'intersection des médiatrices de [AB], [BC] et [AC].
2. Que peut-on en déduire pour les points A, B et C ?
3. En déduire l'aire du cercle passant par les points A, B et C. *On considère le mètre comme unité.*

II.3 Projeté orthogonal, aire d'un triangle

a) Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Définition 1.1 – Projeté orthogonal

Soit $\mathcal{D}$ une droite et M un point tel que $M \notin \mathcal{D}$.
On dit que H est le ______________________ de M sur $\mathcal{D}$ lorsque $H \in \mathcal{D}$ et $(MH) \perp \mathcal{D}$.



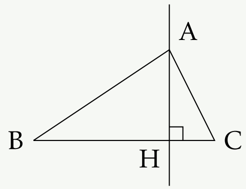
Remarque(s) :

- Le projeté orthogonal H d'un point M sur une droite $\mathcal{D}$ est le point de $\mathcal{D}$ le plus proche de M.
  MH est alors la distance entre M et la droite $\mathcal{D}$.

b) Hauteur et aire d'un triangle

Définition 1.2 – Hauteur

Dans un triangle ABC, la hauteur issue de A est la droite (AH), où H est le projeté orthogonal de A sur (BC).



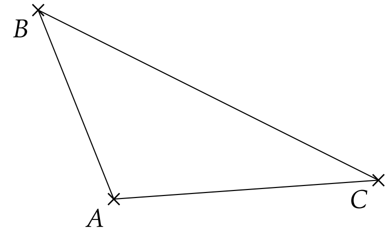
N.B : H s'appelle aussi le ______ de la hauteur issue de A, et $[BC]$ est alors appelé ______ du triangle.

Rappel La hauteur d'un triangle permet de calculer son aire $\mathcal{A}$. Initialement, la hauteur issue de A est une droite, mais on emploie aussi ce terme pour désigner la longueur du segment $[AH]$. On a alors :

$$\mathcal{A} = \dots\dots\dots\dots$$

Exemple 1.5 :

On cherche à calculer l'aire du triangle ABC ci-dessous.
On suppose que l'on est dans un repère orthonormé dans lequel on a $A(-2;-1)$, $B(-3;1{,}5)$ et $C(1{,}5;-0{,}75)$.



1. Placer le point H, pied de la hauteur issue de A.
2. On suppose que le point H a pour coordonnées $H(-1{,}2;0{,}6)$. Calculer l'aire du triangle ABC.

Remarque(s) :

- L'aire obtenue est exprimés en unités d'aire, que l'on n'indique pas en mathématiques. Celle-ci est à déterminer dans un contexte plus concret (e.g (*exempli gratia*) physique, architecture etc). Si par exemple toutes les longueurs étaient exprimées en mètres, nous aurions une surface exprimés en m^2.

II.4 Trigonométrie : calcul de longueurs et d'angles

Définition 1.3 – Cosinus, sinus et tangente d'un angle

Soit α un angle dans un triangle rectangle.

$$\cos(\alpha) = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots} \qquad \sin(\alpha) = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots} \qquad \tan(\alpha) = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

Remarque(s) :

- Un moyen mnémotechnique connu pour les retenir : "sohcahtoa". On retient la prononciation et on sait alors que pour la respecter, les lettres "soh" (pour le sinus) et "cah" (pour le cosinus) sont forcément dans cet ordre.

Propriété 1.5

Si α est la mesure d'un angle aigu dans un triangle rectangle, alors :

. . . .

Démonstration

$$\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=\left(\frac{\text{adj}}{\text{hyp}}\right)^2+\left(\frac{\text{opp}}{\text{hyp}}\right)^2=\frac{\text{adj}^2+\text{opp}^2}{\text{hyp}^2}$$

Or dans un triangle rectangle, $\text{adj}^2+\text{opp}^2=\text{hyp}^2$.

Donc : $\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=\dfrac{\text{hyp}^2}{\text{hyp}^2}=1$. □

Exemple 1.6 :

Soit ABC un triangle tel que : $AB=3$; $BC=4$ et $AC=5$.

1. Démontrer que ABC est rectangle en B.

2. En déduire la mesure des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACB}$ à 0,01° près, de trois manières différentes : en utilisant le cosinus d'abord, puis le sinus et enfin la tangente.

Exercices : B