Prénom : ...
Nom : ...
Classe : Seconde

Bilan de Mathématiques (Sujet A)

Le sujet est à rendre avec la copie.
*Les exercices sont **indépendants**. L'usage de la calculatrice est **autorisé**.*
*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	2	3	4	5	6	Total
Points	6	8	16	4	3	9	46
Score							

Exercice 1 .... 6 pts

Résoudre les inéquations suivantes.

/3 1. $(3x-5)(-4x+7) < 0$.

/3 2. $\dfrac{\frac{1}{2}x+5}{6x+7} \geq 0$

1.

$$\begin{aligned} 3x-5 \geq 0 &\Leftrightarrow 3x \geq 5 \\ &\Leftrightarrow 3x \geq 5 \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -4x+7 \geq 0 &\Leftrightarrow -4x \geq -7 \\ &\Leftrightarrow x \leq \frac{7}{4} \end{aligned}$$

Ainsi :

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		$\frac{7}{4}$		$+\infty$
$3x - 5$		$-$	0	$+$		$+$	
$-4x + 7$		$+$		$+$	0	$-$	
$(3x-5)(-4x+7)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On déduit du tableau ci-dessus $\boxed{S = \left]-\infty;\frac{5}{3}\right[\cup \left]\frac{7}{4};+\infty\right[}$.

2.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x+5 \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}x \geq -5 \\ &\Leftrightarrow x \geq -10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6x+7 \geq 0 &\Leftrightarrow 6x \geq -7 \\ &\Leftrightarrow x \geq -\frac{7}{6} \end{aligned}$$

Ainsi :

x	$-\infty$		-10		$-\frac{7}{6}$		$+\infty$
$\frac{1}{2}x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$6x+7$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{\frac{1}{2}x+5}{6x+7}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

On en déduit : $\boxed{S =]-\infty;-10] \cup \left]-\frac{7}{6};+\infty\right[}$.

Exercice 2 .... 8 pts

Soit ABC un triangle rectangle en B tel que $BC = 4{,}2$ et $AC = 6{,}9$.

/1 1. (a) Dans le triangle ABC, trouver une relation faisant intervenir l'angle $\widehat{BAC}$ et les longueurs AC et BC.

/3 (b) En déduire une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$, au degré près.

/2 (c) En déduire la mesure de tous les angles du triangle.

/2 2. Déterminer AB à 0,1 près.

1. (a) $\sin\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{BC}{AC}$.

   (b) On en déduit que $\widehat{BAC} = \arcsin\left(\frac{BC}{AC}\right) = \arcsin\left(\frac{4{,}2}{6{,}9}\right) \approx \boxed{37°}$.

   (c) La somme des angles d'un triangle vaut 180°.

   ABC est rectangle en B , donc $\boxed{\widehat{ABC} = 90°}$.

   On en déduit enfin : $\widehat{ACB} \approx 180 - (90 + 37) = \boxed{53°}$.

2. D'après le théorème de Pythagore, $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

   On en déduit que $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} \approx 5{,}5$.

Exercice 3 .... 16 pts

On se place dans un repère orthonormé $(O; I, J)$.

Soient $A(-1; 4)$, $B(3; -2)$ et $C(9; 2)$.

/2 1. (a) Tracer le repère $(O; I, J)$ puis y placer les points A, B et C.

/2 (b) Déterminer par le calcul les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

/3 2. (a) Calculer AB, BC et AC.

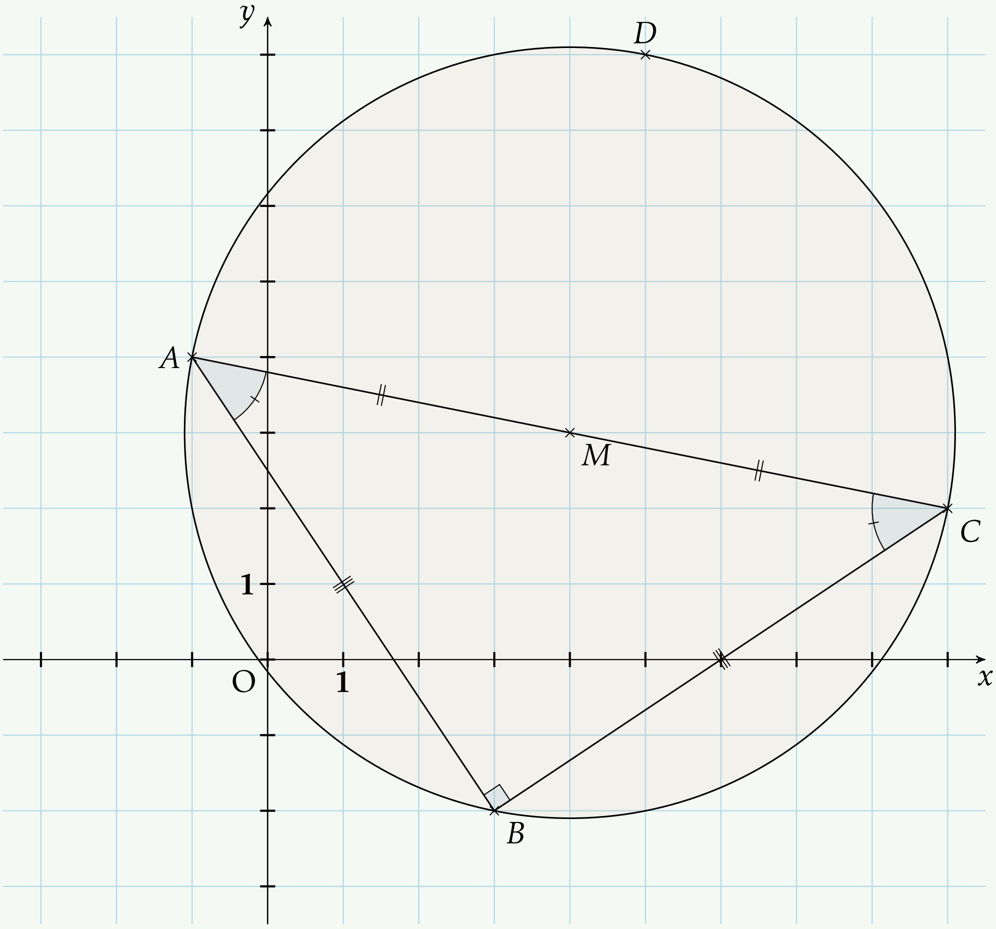
/2 (b) Quelle est la nature de ABC ?

/2 (c) En déduire la mesure des trois angles de ABC.

/2 3. (a) Démontrer que le milieu de $[AC]$ a pour coordonnées $(4; 3)$.

/3 (b) En déduire l'aire du cercle circonscrit au triangle ABC.

1. (a)



(b) $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu.
Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ doivent donc avoir le même milieu.

$$\begin{cases} \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{x_B + x_D}{2} \\ \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{y_B + y_D}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 + 9 = 3 + x_D \\ 4 + 2 = -2 + y_D \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 5 \\ y_D = 8 \end{cases}$$

Donc $\boxed{D(5;8)}$.

2. (a) On applique la formule $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
Ainsi : $\boxed{AB = 2\sqrt{13}}$, $\boxed{BC = 2\sqrt{13}}$ et $\boxed{AC = 2\sqrt{26}}$.

(b) On remarque que $AB = BC$. Donc $\boxed{ABC \text{ est isocèle en } B}$.
Par ailleurs, $AC^2 = AB^2 + BC^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, $\boxed{ABC \text{ est rectangle en } B}$.

(c) $\boxed{\widehat{ABC} = 90°}$.
ABC est isocèle donc les angles à la base sont égaux.
De plus la somme des angles d'un triangle vaut 180°.
On en déduit : $\widehat{BCA} = \widehat{BAC} = \frac{180-90}{2} = \frac{90}{2} = \boxed{45°}$.

3. (a) Notons M le milieu de $[AC]$.
$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-1+9}{2} = 4$.

$y_M = \frac{y_A+y_C}{2} = \frac{4+2}{2} = 3.$
Donc $M(4;3)$.

(b) Notons r le rayon du cercle circonscrit à ABC, et $\mathcal{A}$ son aire.
ABC est rectangle en B, donc son cercle circonscrit a pour diamètre $[AC]$.
Ainsi : $r = \frac{AC}{2} = \sqrt{26}$.
On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \pi r^2 \\ &= \pi \times \sqrt{26}^2 \\ &= \boxed{26\pi} \\ &\approx 81{,}68\end{aligned}$$

Exercice 4 .... 4 pts

Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x - 1$.

/1 1. (a) Calculer l'image de 2 par la fonction f.

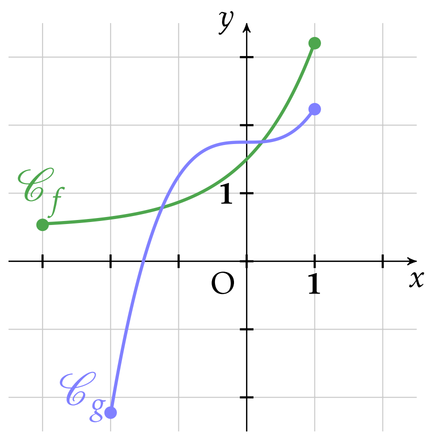
/1 (b) 3 est-il un antécédent de 4 par la fonction f ?

/2 2. Les points $A(4;7)$ et $B(6;12)$ appartiennent-ils à la courbe représentative de la fonction f ?

1. (a) $f(2) = 3 \times 2 - 1 = 5$.
   (b) $f(3) = 3 \times 3 - 1 = 8 \neq 4$.
   Donc 3 n'est pas un antécédent de 4 par f.
2. $f(4) = 3 \times 4 - 1 = 11 \neq 7$.
   Donc le point de coordonnées $(4;7)$ n'appartient pas à $\mathscr{C}_f$.
   $f(6) = 3 \times 6 - 1 = 17 \neq 12$.
   Donc le point de coordonnées $(6;12)$ n'appartient pas à $\mathscr{C}_f$.

Exercice 5 .... 3 pts

Soient f et g deux fonctions dont les courbes représentatives sont tracées ci-dessous.



/1 1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

/2 2. Une personne affirme :

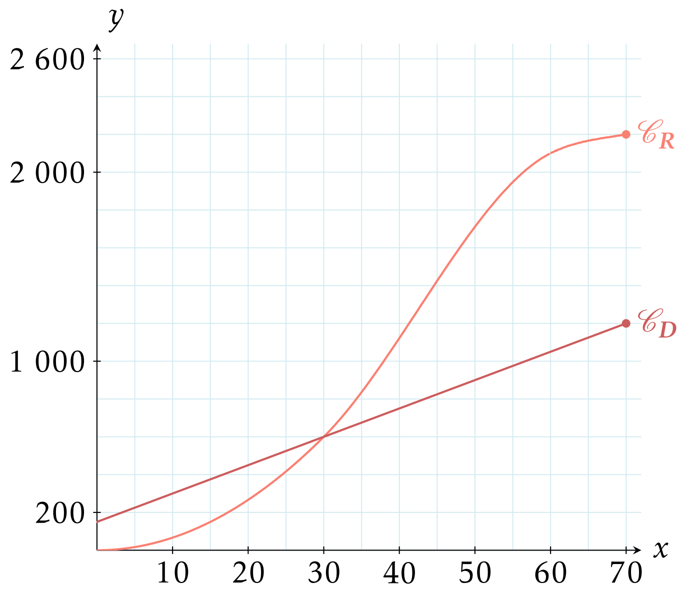
"$f(-1) > g(-1)$".

A-t-elle raison ? *Justifier.*

1. $\mathcal{D}_f = [-3;1]$.
2. $f(-1) < 1$ et $g(-1) > 1$, donc $f(-1) < g(-1)$. Elle a donc tort.

Exercice 6 .... 9 pts

Une entreprise vend des objets. Sa capacité de production hebdomadaire est limitée à 70 objets. On a représenté dans un repère orthogonal la recette en euros de la vente de x objets notée $R(x)$, et la dépense correspondante notée $D(x)$.



/1 1. Quel est l'ensemble de définition des fonctions D et R ?

/6 2. Résoudre graphiquement et interpréter :

(a) $D(x) = R(x)$.

(b) $D(x) > R(x)$.

(c) $D(x) < R(x)$.

/2 3. Déterminer et interpréter $R(70) - D(70)$.

1. $\mathcal{D}_D = [0;70]$ et $\mathcal{D}_R = [0;70]$.
2. (a) $S = \{30\}$.

   (b) $S = [0;30[$.
   Les dépenses sont supérieures aux recettes lorsque l'entreprise vend entre 0 et 30 objets par semaine. La recette et la dépense sont égales pour la vente de 30 objets.

   (c) $S =]30;70]$.
   Les dépenses sont inférieures aux recettes lorque l'entreprise vend entre 30 et 70 objets par semaine.
3.

$$\begin{aligned} R(70) - D(70) &= 2\ 200 - 1\ 200 \\ &= 1\ 000 \end{aligned}$$

Donc pour la vente de 70 objets, l'entreprise réalise un bénéfice hebdomadaire de 1 000 €.

Prénom : ...
Nom : ...
Classe : Seconde

Bilan de Mathématiques (Sujet B)

Le sujet est à rendre avec la copie.
Les exercices sont ***indépendants****. L'usage de la calculatrice est* ***autorisé****.*
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la ***clarté*** *et la* ***précision*** *des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice	1	2	3	4	5	6	Total
Points	6	8	16	4	3	9	46
Score							

Exercice 1 .... 6 pts

Résoudre les inéquations suivantes.

/3 1. $(3x-5)(-4x+7)<0$.

/3 2. $\dfrac{\frac{1}{2}x+5}{6x+7} \geq 0$

1.

$$3x-5 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq 5 \Leftrightarrow 3x \geq 5 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{3}$$

$$-4x+7 \geq 0 \Leftrightarrow -4x \geq -7 \Leftrightarrow x \leq \frac{7}{4}$$

Ainsi :

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		$\frac{7}{4}$		$+\infty$
$3x-5$		$-$	0	$+$		$+$	
$-4x+7$		$+$		$+$	0	$-$	
$(3x-5)(-4x+7)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On déduit du tableau ci-dessus $\boxed{S = \left]-\infty;\frac{5}{3}\right[\cup \left]\frac{7}{4};+\infty\right[}$.

2.

$$\frac{1}{2}x+5 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x \geq -5 \Leftrightarrow x \geq -10$$

$$6x+7 \geq 0 \Leftrightarrow 6x \geq -7 \Leftrightarrow x \geq -\frac{7}{6}$$

Ainsi :

x	$-\infty$		-10		$-\frac{7}{6}$		$+\infty$
$\frac{1}{2}x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$6x+7$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{\frac{1}{2}x+5}{6x+7}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

On en déduit : $\boxed{S =]-\infty;-10] \cup \left]-\frac{7}{6};+\infty\right[}$.

Exercice 2 .... 8 pts

Soit ABC un triangle rectangle en B tel que $BC = 4{,}2$ et $AC = 6{,}9$.

/1 1. (a) Dans le triangle ABC, trouver une relation faisant intervenir l'angle $\widehat{BAC}$ et les longueurs AC et BC.

/3 (b) En déduire une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$, au degré près.

/2 (c) En déduire la mesure de tous les angles du triangle.

/2 2. Déterminer AB à 0,1 près.

1. (a) $\sin\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{BC}{AC}$.

   (b) On en déduit que $\widehat{BAC} = \arcsin\left(\frac{BC}{AC}\right) = \arcsin\left(\frac{4{,}2}{6{,}9}\right) \approx \boxed{37°}$.

   (c) La somme des angles d'un triangle vaut 180°.
   ABC est rectangle en B , donc $\boxed{\widehat{ABC} = 90°}$.
   On en déduit enfin : $\widehat{ACB} \approx 180 - (90 + 37) = \boxed{53°}$.

2. D'après le théorème de Pythagore, $AC^2 = AB^2 + BC^2$.
   On en déduit que $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} \approx 5{,}5$.

Exercice 3 .... 16 pts

On se place dans un repère orthonormé $(O;I,J)$.
Soient $A(-1;4)$, $B(3;-2)$ et $C(9;2)$.

/2 1. (a) Tracer le repère $(O;I,J)$ puis y placer les points A, B et C.

/2 (b) Déterminer par le calcul les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

/3 2. (a) Calculer AB, BC et AC.

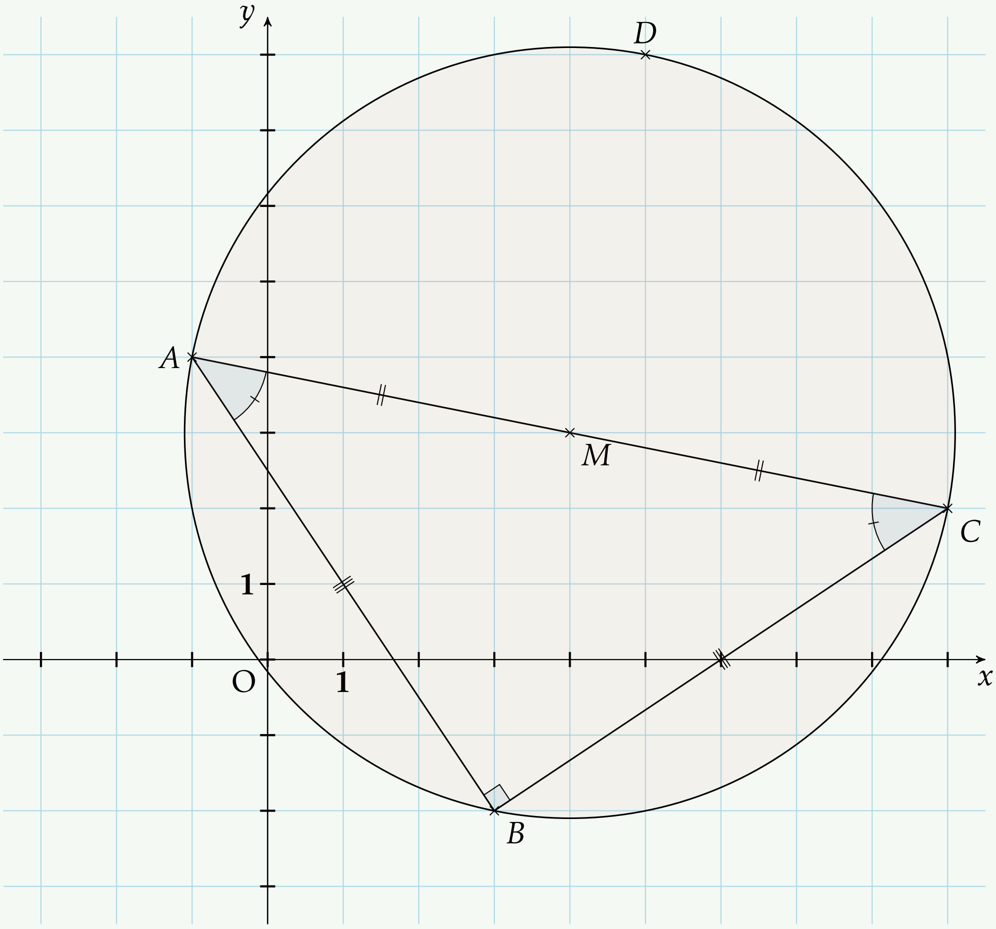
/2 (b) Quelle est la nature de ABC ?

/2 (c) En déduire la mesure des trois angles de ABC.

/2 3. (a) Démontrer que le milieu de $[AC]$ a pour coordonnées $(4;3)$.

/3 (b) En déduire l'aire du cercle circonscrit au triangle ABC.

1. (a)



(b) $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu.
Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ doivent donc avoir le même milieu.

$$\begin{cases} \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{x_B + x_D}{2} \\ \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{y_B + y_D}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 + 9 = 3 + x_D \\ 4 + 2 = -2 + y_D \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 5 \\ y_D = 8 \end{cases}$$

Donc $\boxed{D(5;8)}$.

2. (a) On applique la formule $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
Ainsi : $\boxed{AB = 2\sqrt{13}}$, $\boxed{BC = 2\sqrt{13}}$ et $\boxed{AC = 2\sqrt{26}}$.

(b) On remarque que $AB = BC$. Donc $\boxed{ABC \text{ est isocèle en } B}$.
Par ailleurs, $AC^2 = AB^2 + BC^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, $\boxed{ABC \text{ est rectangle en } B}$.

(c) $\boxed{\widehat{ABC} = 90°}$.
ABC est isocèle donc les angles à la base sont égaux.
De plus la somme des angles d'un triangle vaut 180°.
On en déduit : $\widehat{BCA} = \widehat{BAC} = \frac{180-90}{2} = \frac{90}{2} = \boxed{45°}$.

3. (a) Notons M le milieu de $[AC]$.
$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-1+9}{2} = 4$.

$y_M = \frac{y_A+y_C}{2} = \frac{4+2}{2} = 3$.
Donc $M(4;3)$.

(b) Notons r le rayon du cercle circonscrit à ABC, et $\mathcal{A}$ son aire.
ABC est rectangle en B, donc son cercle circonscrit a pour diamètre $[AC]$.
Ainsi : $r = \frac{AC}{2} = \sqrt{26}$.
On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \pi r^2 \\ &= \pi \times \sqrt{26}^2 \\ &= \boxed{26\pi} \\ &\approx 81{,}68\end{aligned}$$

Exercice 4 .... 4 pts

Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x - 1$.

/1 1. (a) Calculer l'image de 3 par la fonction f.

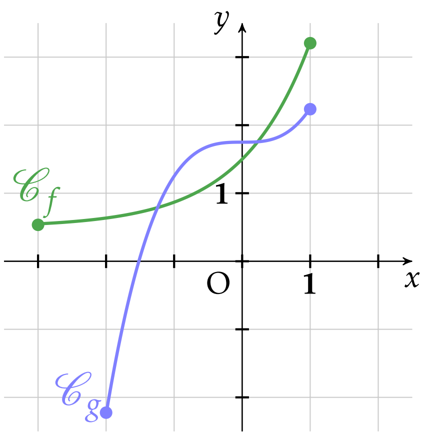
/1 (b) 1 est-il un antécédent de 4 par la fonction f ?

/2 2. Les points $A(6;12)$ et $B(4;7)$ appartiennent-ils à la courbe représentative de la fonction f ?

1. (a) $f(3) = 3 \times 3 - 1 = 8$.
   (b) $f(1) = 3 \times 1 - 1 = 2 \neq 4$.
   Donc 1 n'est pas un antécédent de 4 par f.
2. $f(4) = 3 \times 4 - 1 = 11 \neq 7$.
   Donc le point de coordonnées $(4;7)$ n'appartient pas à $\mathscr{C}_f$.
   $f(6) = 3 \times 6 - 1 = 17 \neq 12$.
   Donc le point de coordonnées $(6;12)$ n'appartient pas à $\mathscr{C}_f$.

Exercice 5 .... 3 pts

Soient f et g deux fonctions dont les courbes représentatives sont tracées ci-dessous.



/1 1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g.

/2 2. Une personne affirme :

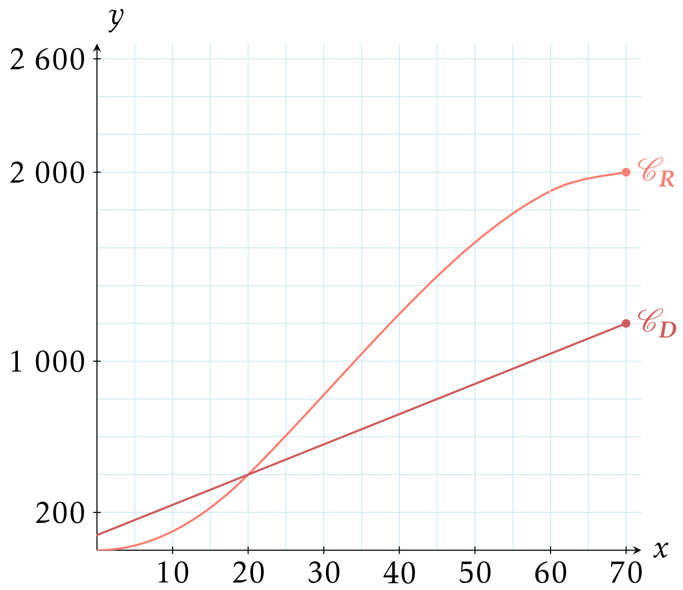
"$f(1) < g(1)$".

A-t-elle raison ? *Justifier.*

1. $\mathcal{D}_g = [-2;1]$.
2. $f(1) > 3$ et $g(1) < 3$, donc $f(1) > g(1)$. Elle a donc tort.

Exercice 6 .... 9 pts

Une entreprise vend des objets. Sa capacité de production hebdomadaire est limitée à 70 objets. On a représenté dans un repère orthogonal la recette en euros de la vente de x objets notée $R(x)$, et la dépense correspondante notée $D(x)$.



/1 1. Quel est l'ensemble de définition des fonctions D et R ?

/6 2. Résoudre graphiquement et interpréter :

   (a) $D(x) = R(x)$.

   (b) $D(x) > R(x)$.

   (c) $D(x) < R(x)$.

/2 3. Déterminer et interpréter $R(70) - D(70)$.

1. $\mathcal{D}_D = [0;70]$ et $\mathcal{D}_R = [0;70]$.
2. (a) $S = \{20\}$.

   (b) $S = [0;20[$.
   Les dépenses sont supérieures aux recettes lorsque l'entreprise vend entre 0 et 20 objets par semaine. La recette et la dépense sont égales pour la vente de 20 objets.

   (c) $S =]20;70]$.
   Les dépenses sont inférieures aux recettes lorque l'entreprise vend entre 20 et 70 objets par semaine.
3. $$\begin{aligned} R(70) - D(70) &= 2\,000 - 1\,200 \\ &= 800 \end{aligned}$$

   Donc pour la vente de 70 objets, l'entreprise réalise un bénéfice hebdomadaire de 800 €.