1 Probabilités conditionnelles

Rappel 1.1.

- En probabilités, on s'intéresse à des **expériences aléatoires**, soit des expériences avec plusieurs résultats possibles (ex : 1 ;2 ;... ;6 pour un lancer de dé). Ces différents résultats sont appellés **issues** de l'expérience.
- L'ensemble des issues est appelé **univers**, souvent noté $\boldsymbol{\Omega}$.
- La somme des probabilités de chacune des issues d'une expérience **vaut toujours 1** (cela traduit qu'on est certain d'obtenir un des résultats possibles).
- Un **évènement** est un ensemble formé d'une ou plusieurs issues (ex : obtenir un nombre pair lorsqu'on lance un dé).
- La probabilité d'un certain évènement E est toujours comprise entre 0 (évènement impossible) et 1 (évènement certain).
- L'évènement contraire de E, noté $\overline{E}$ est l'ensemble contenant toutes les issues de Ω, sauf celles de E ($\overline{E} = \Omega \setminus E$).
- Lorsque $P(A \cap B) = 0$, on dit que les évènements A et B sont **incompatibles**.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- Si les issues sont **équiprobables**, alors :

$$P(A) = \frac{\text{nb d'issues qui réalisent } A}{\text{nb total d'issues}}$$

I Conditionnement

I.1 Probabilité conditionnelle

Définition 1.1

Soient A et B deux évènements avec $p(A) \neq 0$.
On appelle **probabilité conditionnelle de B sachant A**, la probabilité que l'évènement B se réalise **sachant que** l'évènement A est réalisé. Elle est notée $P_A(B)$ (ou aussi parfois $P(B|A)$) et est définie par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Exemple 1.1. Un service après-vente a constaté que les retours d'un appareil sont dûs dans 20 % des cas à une panne A, dans 40 % des cas à une panne B et dans 3 % des cas à la simultanéité des deux pannes.
Un appareil choisi au hasard présente la panne A.
Quelle est la probabilité qu'il ait aussi la panne B ?

Corollaire 1.1

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$$

Démonstration

$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$.
$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$.
D'où : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$. □

Exemple 1.2. Les élèves de terminale d'un lycée ont passé un test de certification en anglais.

- 80% ont réussi le test.
- Parmi ceux qui ont réussi le test, 95% n'ont jamais redoublé.
- Parmi ceux qui on échoué, 2% n'ont jamais redoublé.

On considère les évènements T : « l'élève a réussi le test » et R : « l'élève a déjà redoublé ».
Quelle est la probabilité de l'évènement : « L'élève a réussi le test et n'a jamais redoublé » ?
L'énoncé nous donne les probabilités suivantes :

- $P(T) = 0{,}8$.
- $P_T(\overline{R}) = 0{,}95$.
- $P_{\overline{T}}(\overline{R}) = 0{,}02$.

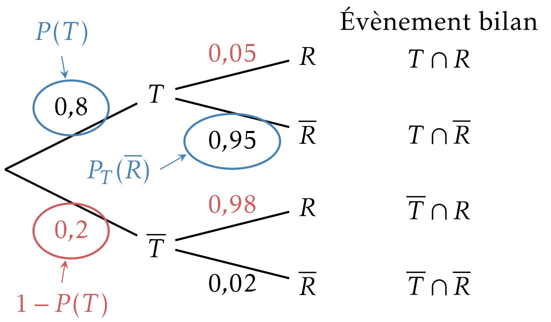
On cherche la probabilité de l'évènement $T \cap \overline{R}$.
$P(T \cap \overline{R}) = P(T) \times P_T(\overline{R}) = 0{,}8 \times 0{,}95 = 0{,}76$.

I.2 Représentation par un arbre pondéré

Propriété 1.2

- Sur chaque branche, on indique la probabilité d'obtenir l'issue correspondante.
- La **somme des probabilités** des branches **de même origine** doit toujours être **égale à 1**.
- La probabilité d'un **chemin complet** est égale au **produit des probabilités** inscrites sur chaque branche du chemin.

Exemple 1.3. Représenter la situation de l'exemple précédent à l'aide d'un arbre pondéré.



I.3 Indépendance

Définition 1.2

Les évènements A et B sont dits **indépendants** lorsque $\boldsymbol{P(A\cap B)=P(A)\times P(B)}$.

Propriété 1.3

A et B sont indépendants si et seulement si $\boldsymbol{P_A(B)=P(B)}$.

DÉMONSTRATION

$P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$.
Ainsi :

$$\begin{aligned}P(A\cap B)=P(A)\times P(B) &\Leftrightarrow P(A)\times P_A(B)=P(A)\times P(B)\\ &\Leftrightarrow P_A(B)=P(B)\end{aligned}$$

□

Remarque 1.1. L'indépendance de A et B signifie donc que la réalisation de l'un n'impacte pas la probabilité que l'autre se réalise.

Propriété 1.4

Si A et B sont indépendants, alors $\boldsymbol{\overline{A}}$ et $\boldsymbol{B}$ sont indépendants.

Exemple 1.4. Soient A et B deux évènements tels que $P(A)=0,8$, $P(B)=0,35$ et $P(A\cap B)=0,28$. Montrer que A et B sont indépendants.
$P(A)\times P(B)=0,8\times 0,35=0,28=P(A\cap B)$.
Donc A et B sont indépendants.
NB : on le retrouve aussi en calculant en amont $P_A(B)$ ou $P_B(A)$.
$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0,28}{0,8}=0,35=P(B)$.

II Probabilités totales

II.1 Partition de l'univers

Définition 1.3

On dit que les évènements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment une **partition** de Ω si :

- les évènements $A_1, \ldots, A_n$ sont **incompatibles** deux à deux (i.e les intersections sont vides)
- $\boldsymbol{A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n=\Omega}$.

Remarque 1.2. De manière générale, A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω.

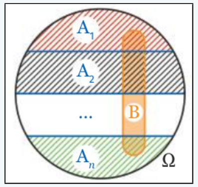
Exemple 1.5. On lance un dé à 6 faces. Donner deux exemples de partitions possibles pour Ω.
$A=\{1\ ;\ 2\}$ et $B=\{3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$ forment une partition de l'univers.
C : « le résultat est pair » et D : « le résultat est impair » forment également une partition de l'univers.

II.2 Formule des probabilités totales

Propriété 1.5 – Formule des probabilités totales

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment une **partition** de Ω, alors pour tout évènement B :

$$P(B) = \boldsymbol{P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n)}$$



Remarque 1.3. Sur un arbre pondéré, calculer $P(E)$ revient à calculer la somme des probabilités de tous les chemins qui mènent à E.

Exemple 1.6. On reprend l'exemple du paragraphe « Représentation par un arbre pondéré ».

1. Déterminer la probabilité de l'évènement « l'élève a déjà redoublé ».
   T et $\overline{T}$ forment une partition de l'univers.
   D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(R) &= P(T \cap R) + P(\overline{T} \cap R) \\ &= P(T) \times P_T(R) + P(\overline{T}) \times P_{\overline{T}}(R) \\ &= 0{,}8 \times 0{,}05 + 0{,}2 \times 0{,}98 \\ &= 0{,}236 \end{aligned}$$

2. Dresser l'abre pondéré « retourné », c'est à dire en considérant cette fois-ci R et $\overline{R}$ comme une partition de Ω.

$$\begin{aligned} P_R(T) &= \frac{P(T \cap R)}{P(R)} \\ &= \frac{0{,}04}{0{,}236} \\ &\approx 0{,}1695 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{\overline{R}}(T) &= \frac{P(T \cap \overline{R})}{P(\overline{R})} \\ &= \frac{0{,}8 \times 0{,}95}{1 - 0{,}236} \\ &\approx 0{,}9948 \end{aligned}$$

   On en déduit l'arbre suivant :