1 Trigonométrie

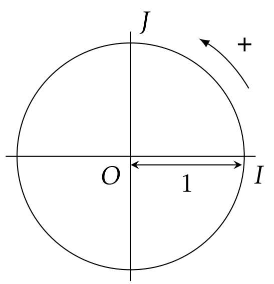
I Cercle trigonométrique

Définition 1.1

On appelle **cercle trigonométrique** le cercle de centre O, de rayon 1, orienté dans le sens direct, ou sens **trigonométrique**.

Remarque 1.1. Le sens trigonométrique correspond au sens **inverse** des aiguilles d'une montre.

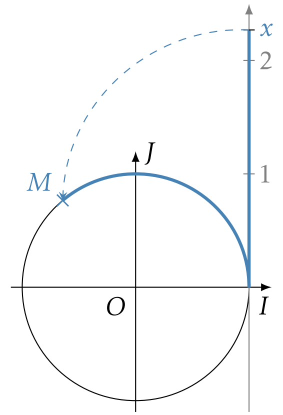
Illustration



Définition 1.2

En enroulant la droite numérique autour du cercle trigonométrique, on peut associer à tout réel x de la droite un unique point M du cercle, appelé **point image**.

Illustration



II Le radian : une unité d'angle

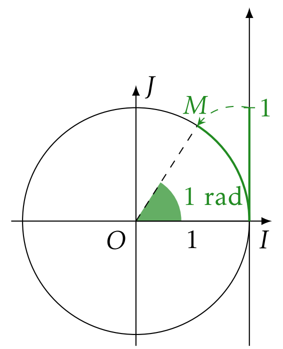
II.1 Introduction

Définition 1.3 – Radian

1 radian est égal à la mesure de l'angle $\widehat{IOM}$ où M est le point image du réel 1 sur le cercle trigonométrique.

Remarque 1.2. De manière plus général, un radian est la mesure de l'angle intercepté par un arc de cercle de longueur égale au rayon du cercle (dans le cas du cercle trigonométrie, $r = 1$).

Illustration



Rappel 1.1. Le périmètre d'un cercle de rayon r est égal à $2\pi r$.
Cas particulier : un cercle de rayon 1 a pour périmètre 2π.

Propriété 1.1 – Conversion degrés/radians

- $360° = 2\pi$ rad
- Degrés et radians sont **proportionnels**.

Remarque 1.3. 2π rad correspond à l'angle formé par un arc de cercle qui ferait le tour complet du cercle, i.e à une rotation de 360°.

Exemple 1.1. Valeurs particulières :

$\times\frac{\pi}{180}$ (Degrés → Radians) ; $\times\frac{180}{\pi}$ (Radians → Degrés)

Degrés	0	**30**	45	**60**	90	**180**	360
Radians	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

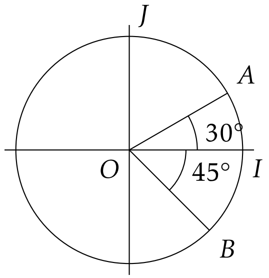
Exemple 1.2. Convertir les angles suivants :

1. $\frac{\pi}{7}\,\text{rad} = \frac{180\pi}{7\pi}° = \frac{180}{7}° \approx 25{,}71°$
2. $120° = \frac{120\pi}{180}\,\text{rad} = \frac{2\pi}{3}\,\text{rad} \approx 2{,}09\,\text{rad}$
3. $1\,\text{rad} = \frac{1\times180}{\pi}° \approx 57{,}3°$
4. $400° = \frac{400\pi}{180}\,\text{rad} = \frac{20\pi}{9}\,\text{rad} \approx 6{,}98\,\text{rad}$

II.2 Angles sur le cercle trigonométrique

Exemple 1.3.

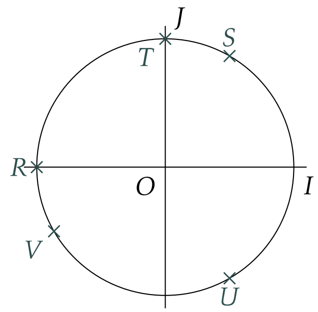
1. Donner deux mesures en radians, une positive et une négative, des angles orientés suivants :



(a) $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{6}\,\text{rad} = -\frac{11\pi}{6}\,\text{rad}$

(b) $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}) = \frac{7\pi}{4}\,\text{rad} = -\frac{\pi}{4}\,\text{rad}$

2. Placer le point associé à chaque réel sur le cercle trigonométrique :



(a) R associé à π
(b) S associé à $\frac{\pi}{3}$
(c) T associé à $\frac{5\pi}{2}$
(d) U associé à $-\frac{13\pi}{3}$
(e) V associé à $-\frac{5\pi}{6}$

Propriété 1.2 – Même image sur le cercle trigonométrique

Deux réels x et y ont le même point image sur le cercle trogonométrique si et seulement si **$x-y$ est un multiple de 2π**.

Exemple 1.4. Dans chacun des cas, dire si les points images des réels x et y sur le cercle trigonométrique sont confondus.

1. $x = \frac{2\pi}{7}$ et $y = -\frac{26\pi}{7}$
   $x-y = \frac{2\pi}{7} - \left(-\frac{26\pi}{7}\right) = \frac{2\pi+26\pi}{7} = \frac{28\pi}{7} = 4\pi = 2\times2\pi.$
   $x-y$ est un multiple de 2π, donc x et y ont le même point image sur le cercle trigonométrique.
2. $x = \frac{4\pi}{18}$ et $y = \frac{63\pi}{9}$
   $x-y = \frac{4\pi}{18} - \frac{63\pi}{9} = \frac{4\pi-126\pi}{18} = -\frac{122\pi}{18} = -\frac{61\pi}{9}.$
   Or $\frac{61\pi}{9}$ n'est pas un multiple de 2π. Donc les points images des réels x et y sur le cercle trigonométrique ne sont pas confondus.

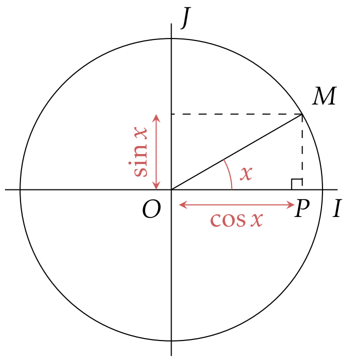
III Cosinus et sinus

III.1 Définition et propriétés

Définition 1.4

Soit M le point image d'un réel x sur le cercle trigonométrique.
On appelle **cosinus** et **sinus** de x, notés **$\cos x$** et **$\sin x$**, les coordonnées de M.

Illustration



Démonstration

OMP est rectangle en P.
$\cos x = \frac{OP}{OM} = \frac{OP}{1} = OP = x_M$.
$\sin x = \frac{MP}{OM} = \frac{MP}{1} = MP = y_M$.

□

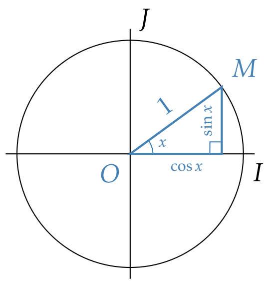
Propriété 1.3

Pour tout nombre réel x :

1. $\sin^2(x) + \cos^2(x) = \mathbf{1}$
2. $\mathbf{-1} \leq \sin(x) \leq \mathbf{1}$ et $\mathbf{-1} \leq \cos(x) \leq \mathbf{1}$

Démonstration

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$:
On se place dans un triangle rectangle ayant pour hypothénuse $[OM]$ où M est le point image d'un réel x sur le cercle trigonométrique.



Dans ce triangle, les deux autres côtés ont respectivement pour longueurs $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Ainsi, d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}\cos^2(x) + \sin^2(x) &= OM^2 \\ &= 1\end{aligned}$$

□

Exemple 1.5. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Sachant que $\cos x = \frac{1}{2}$, quelles sont les valeurs possibles pour $\sin x$?

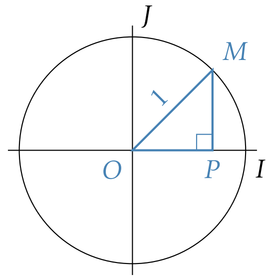
III.2 Valeurs remarquables

Propriété 1.4

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Démonstration

$\cos(\frac{\pi}{4})$ et **$\sin(\frac{\pi}{4})$** :
On construit à l'intérieur du cercle trigonométrique le triangle OMP rectangle et isocèle en P, où M est le point image du réel $\frac{\pi}{4}$ et P sont projeté orthogonal sur (OI).

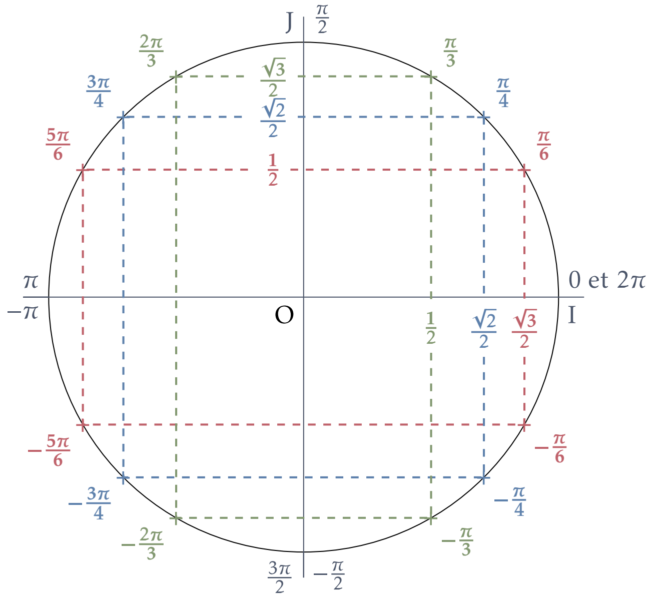


D'après le théorème de Pythagore, $OP^2 + PM^2 = OM^2$.
$OP = PM$, donc $2OP^2 = OM^2$.
$OM = 1$, d'où :

$$\begin{aligned}2OP^2 = OM^2 &\Leftrightarrow 2OP^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow OP^2 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow OP = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad (\text{car } OP > 0)$$

On en déduit que : $OP = PM = \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Or par construction du triangle OMP, $OP = \cos(\frac{\pi}{4})$ et $PM = \sin(\frac{\pi}{4})$. □



Exemple 1.6. Résoudre l'équation $2\cos x = -1$.

$$2\cos x = -1 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \left\{ -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ ; \ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad | k \in \mathbb{Z} \right\}$$