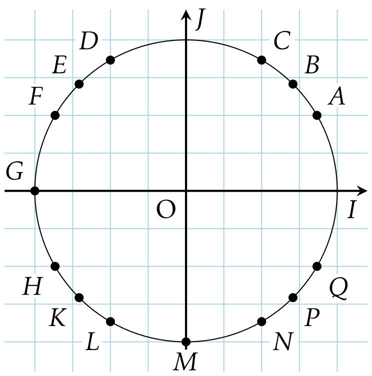
A Radian

1 Dans chacun des cas, donner la mesure exacte en degrés/radians des angles suivants sous la forme la plus simplifiée possible, puis donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

1. $\frac{5\pi}{6} = 150°$
2. $5° = \frac{\pi}{36}$ rad $\approx 0{,}09$ rad
3. $\frac{7\pi}{12} = 105°$
4. $\frac{9\pi}{5} = 324°$
5. $198° = \frac{11\pi}{10}$ rad $\approx 3{,}46$ rad
6. $315° = \frac{7\pi}{4}$ rad $\approx 5{,}5$ rad
7. $\frac{5\pi}{4} = 225°$
8. $72° = \frac{2\pi}{5}$ rad $\approx 1{,}26$ rad
9. $\frac{14\pi}{9} = 280°$
10. $40° = \frac{2\pi}{9}$ rad $\approx 0{,}7$ rad

Pour convertir des degrés en radians, on multiplie par $\frac{\pi}{180}$ et pour convertir des radians en degrés, on multiplie par $\frac{180}{\pi}$.

2 Déterminer le point image associé à chaque réel.



1. $\frac{\pi}{3}$ C
2. $-\frac{3\pi}{4}$ K
3. $\frac{5\pi}{6}$ F
4. $\frac{\pi}{2}$ J
5. $-\frac{\pi}{4}$ P
6. $-\frac{5\pi}{6}$ H
7. $\frac{2\pi}{3}$ D
8. π G
9. 0 I
10. $-\frac{2\pi}{3}$ L
11. $\frac{3\pi}{4}$ E
12. $-\frac{\pi}{2}$ M

3 Soit M le point image du réel $\frac{\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique. Donner tous les nombres réels ayant le même point image.

Tous les nombres ayant le même point image sont ceux de la forme $\frac{\pi}{3} + k \times 2\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, qu'on écrit plus généralement ainsi : $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

4 Dans chacun des cas, dire en justifiant si les réels x et y ont le même point image sur le cercle trigonométrique.

1. $x = \frac{\pi}{4}$ et $y = \frac{17\pi}{4}$ Oui, on a $x - y = -4\pi = -2 \times 2\pi$
2. $x = -\frac{4\pi}{3}$ et $y = -\frac{23\pi}{3}$ Non, $x - y = \frac{19\pi}{3} = 3 \times 2\pi + \frac{\pi}{3}$
3. $x = \frac{\pi}{7}$ et $y = -\frac{54\pi}{7}$ Non, $x - y = \frac{55\pi}{7} = 3 \times 2\pi + \frac{13\pi}{7}$
4. $x = \frac{27\pi}{11}$ et $y = -\frac{17\pi}{11}$ Oui, on a $x - y = 4\pi = 2 \times 2\pi$

B Cosinus et sinus

5

1. Dans chacun des cas, donner toutes les valeurs possibles du sinus associé, arrondies à 10^{-2} près.

(a) $\cos(x) = 0{,}36$

$$\begin{aligned}\cos(x) = 0{,}36 &\Rightarrow \sin^2(x) + 0{,}36^2 = 1\\ &\Rightarrow \sin^2(x) = 1 - 0{,}36^2\\ &\Rightarrow \sin(x) = \sqrt{1-0{,}36^2} \text{ ou } \sin(x) = -\sqrt{1-0{,}36^2}\\ &\Rightarrow \sin(x) \approx 0{,}93 \text{ ou } \sin(x) \approx -0{,}93\end{aligned}$$

(b) $\cos(x) = 0{,}7$

$$\begin{aligned}\cos(x) = 0{,}7 &\Rightarrow \sin^2(x) + 0{,}7^2 = 1\\ &\Rightarrow \sin^2(x) = 1 - 0{,}7^2\\ &\Rightarrow \sin(x) = \sqrt{1-0{,}7^2} \text{ ou } \sin(x) = -\sqrt{1-0{,}7^2}\\ &\Rightarrow \sin(x) \approx 0{,}71 \text{ ou } \sin(x) \approx -0{,}71\end{aligned}$$

(c) $\cos(x) = -0{,}8$

$$\begin{aligned}\cos(x) = -0{,}8 &\Rightarrow \sin^2(x) + (-0{,}8)^2 = 1\\ &\Rightarrow \sin^2(x) = 1 - (-0{,}8)^2\\ &\Rightarrow \sin(x) = \sqrt{1-(-0{,}8)^2} \text{ ou } \sin(x) = -\sqrt{1-(-0{,}8)^2}\\ &\Rightarrow \sin(x) = 0{,}6 \text{ ou } \sin(x) = -0{,}6\end{aligned}$$

(d) $\cos(x) = 0$

$$\begin{aligned}\cos(x)=0 &\Rightarrow \sin^2(x)+0^2=1\\ &\Rightarrow \sin^2(x)=1\\ &\Rightarrow \sin(x)=\sqrt{1} \text{ ou } \sin(x)=-\sqrt{1}\\ &\Rightarrow \sin(x)=1 \text{ ou } \sin(x)=-1\end{aligned}$$

2. Dans chacun des cas, donner toutes les valeurs possibles du cosinus associé, arrondies à 10^{-2} près.

(a) $\sin(x)=-0{,}9$

$$\begin{aligned}\sin(x)=-0{,}9 &\Rightarrow \cos^2(x)+(-0{,}9)^2=1\\ &\Rightarrow \cos^2(x)=1-(-0{,}9)^2\\ &\Rightarrow \cos(x)=\sqrt{1-(-0{,}9)^2} \text{ ou } \cos(x)=-\sqrt{1-(-0{,}9)^2}\\ &\Rightarrow \cos(x)\approx 0{,}44 \text{ ou } \cos(x)\approx -0{,}44\end{aligned}$$

(b) $\sin(x)=0{,}25$

$$\begin{aligned}\sin(x)=0{,}25 &\Rightarrow \cos^2(x)+0{,}25^2=1\\ &\Rightarrow \cos^2(x)=1-0{,}25^2\\ &\Rightarrow \cos(x)=\sqrt{1-0{,}25^2} \text{ ou } \cos(x)=-\sqrt{1-0{,}25^2}\\ &\Rightarrow \cos(x)\approx 0{,}97 \text{ ou } \cos(x)\approx -0{,}97\end{aligned}$$

(c) $\sin(x)=\frac{4}{5}$

$$\begin{aligned}\sin(x)=\frac{4}{5} &\Rightarrow \cos^2(x)+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1\\ &\Rightarrow \cos^2(x)=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2\\ &\Rightarrow \cos(x)=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} \text{ ou } \cos(x)=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}\\ &\Rightarrow \cos(x)=0{,}6 \text{ ou } \cos(x)=-0{,}6\end{aligned}$$

(d) $\sin(x)=1$

$$\begin{aligned}\sin(x)=1 &\Rightarrow \cos^2(x)+1^2=1\\ &\Rightarrow \cos^2(x)=0\\ &\Rightarrow \cos(x)=0\end{aligned}$$

6

1. En utilisant les touches arccos et arcsin (ou $\cos^{-1}$ et $\sin^{-1}$) de la calculatrice, déterminer une valeur de x, arrondie à 0,1 près, en degré puis en radian dans les cas suivants :
   - $\cos(x)=0{,}5$
   - $\sin(x)=0{,}2$
   - $\sin(x)=-0{,}5$

   - $\arccos(0{,}5)=60$ (en radians : $\frac{\pi}{3}$)
   - $\arcsin(0{,}2)\approx 11{,}5$ (en radians : environ 0,2)
   - $\arcsin(-0{,}5)=-30$ (en radians : $-\frac{\pi}{6}$)

2. La calculatrice affiche-t-elle tous les résultats possibles ? *Justifier*.

   Non, il y aurait une infinité de mesures possibles.
   La fonction arccos associe à une valeur entre -1 et 1 la mesure associée entre 0 et π.
   La fonction arcsin associe à une valeur entre -1 et 1 la mesure associée entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

7 Sans calculatrice, calculer :

1. $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}$
2. $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\times\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 0\times\frac{1}{2}=0$
3. $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)-\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\sin(\pi)=-1-\frac{\sqrt{3}}{2}=-1-\frac{\sqrt{3}}{2}$
4. $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\times\cos(\pi)=\frac{1}{2}-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times(-1)=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}$

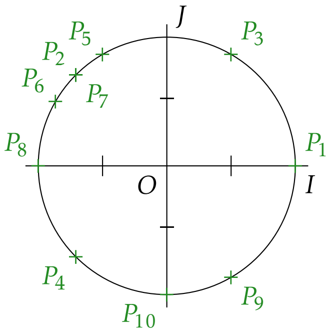
8 Dans chacun des cas, déterminer sans calculatrice les valeurs du cosinus et du sinus de l'angle α.

1. $\alpha=\frac{\pi}{3}$
2. $\alpha=-\frac{13\pi}{6}$
3. $\alpha=\frac{\pi}{4}$
4. $\alpha=\frac{12\pi}{3}$
5. $\alpha=\frac{9\pi}{4}$

1. $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. $\cos\left(\frac{-13\pi}{6}\right)=\cos\left(-2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   $\sin\left(-\frac{13\pi}{6}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$.

3. $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
4. $\cos\left(\frac{12\pi}{3}\right) = \cos(4\pi) = 1$.
   $\sin\left(\frac{12\pi}{3}\right) = \sin(4\pi) = 0$.
5. $\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
   $\sin\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

9 Dans chacun des cas, placer le point image sur le cercle trigonométrique (on le nommera P_1, P_2, P_3...).



1. 2π
2. $-\frac{5\pi}{4}$
3. $\frac{7\pi}{3}$
4. $-\frac{3\pi}{4}$
5. $-\frac{22\pi}{3}$
6. $\frac{29\pi}{6}$
7. $-\frac{13\pi}{4}$
8. 43π
9. $-\frac{\pi}{3}$
10. $\frac{7\pi}{2}$

10 Dans chacun des cas, déterminer un réel x dont le cosinus et le sinus ont les valeurs indiquées :

1. $\cos x = \frac{1}{2}$ et $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin x = -\frac{1}{2}$
3. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
4. $\cos x = -1$ et $\sin x = 0$

1. $x = \frac{\pi}{3}$.
2. $x = -\frac{\pi}{6}$.
3. $x = \frac{\pi}{4}$.
4. $x = \pi$.

11 Soit x un réel appartenant à $]-\pi;\pi]$.

1. Donner les valeurs possibles de x si $\cos(x) \in [0;1]$ et $\sin(x) \in [-1;0]$.
2. Donner les valeurs possibles de x si $\cos(x) \in \left[\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ et $\sin(x) \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$.

1. $x \in \left[-\frac{\pi}{2};0\right]$.
2. $x = \frac{\pi}{6}$

12 Résoudre l'équation $-2\sin(x) = \sqrt{3}$.

$$-2\sin(x) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad ,k \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{S = \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\ ;\ -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

13 Résoudre sur $]-\pi;\pi]$ l'équation $\cos(2x) = \frac{1}{2}$.

$$\cos(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad ,k \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$$

On cherche les solutions appartenant à $]-\pi;\pi]$.

- $$-\pi < \frac{\pi}{6} + k\pi \le \pi \Leftrightarrow -\pi - \frac{\pi}{6} < k\pi \le \pi - \frac{\pi}{6}$$
  $$\Leftrightarrow \frac{-\pi - \frac{\pi}{6}}{\pi} < k \le \frac{\pi - \frac{\pi}{6}}{\pi}$$

  $\frac{-\pi-\frac{\pi}{6}}{\pi} \approx -1{,}17$ et $\frac{\pi-\frac{\pi}{6}}{\pi} \approx 0{,}83$.
  Les valeurs possibles pour k sont donc -1 et 0.
  Pour $\frac{\pi}{6} + k\pi$, cela donne ainsi comme solutions :
  - ◇ $\frac{\pi}{6} + (-1) \times \pi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6}$.
  - ◇ $\frac{\pi}{6} + 0 \times \pi = \frac{\pi}{6}$.
- $$-\pi < -\frac{\pi}{6} + k\pi \le \pi \Leftrightarrow -\pi + \frac{\pi}{6} < k\pi \le \pi + \frac{\pi}{6}$$
  $$\Leftrightarrow \frac{-\pi + \frac{\pi}{6}}{\pi} < k \le \frac{\pi + \frac{\pi}{6}}{\pi}$$

  $\frac{-\pi+\frac{\pi}{6}}{\pi} \approx -0{,}83$ et $\frac{\pi+\frac{\pi}{6}}{\pi} \approx 1{,}17$.
  Les valeurs possibles pour k sont donc 0 et 1.
  Pour $-\frac{\pi}{6} + k\pi$, cela donne ainsi comme solutions :

◇ $-\frac{\pi}{6}+0\times\pi=-\frac{\pi}{6}$.

◇ $-\frac{\pi}{6}+1\times\pi=\frac{5\pi}{6}$.

Au final, on a donc :

$$\boxed{S=\left\{-\frac{5\pi}{6}\ ;\ -\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{5\pi}{6}\right\}}$$

14 Résoudre sur $]-\pi;\pi]$ l'équation $\sin(2x+1)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\begin{aligned}\sin(2x+1)=-\frac{\sqrt{3}}{2} &\Leftrightarrow 2x+1=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \text{ ou } 2x+1=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\text{ , avec } k\in\mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow 2x=-1-\frac{\pi}{3}+2k\pi \text{ ou } 2x=-1-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\\ &\Leftrightarrow 2x=-\frac{3+\pi-6k\pi}{3} \text{ ou } 2x=-\frac{3+2\pi-6k\pi}{3}\\ &\Leftrightarrow x=-\frac{3+\pi-6k\pi}{6} \text{ ou } x=-\frac{3+2\pi-6k\pi}{6}\end{aligned}$$

On cherche combien cela donne de solutions entre $-\pi$ (exclus) et π (inclus) pour la première expression :

$$\begin{aligned}-\pi<-\frac{3+\pi-6k\pi}{6}\leq\pi &\Leftrightarrow -6\pi<-3-\pi+6k\pi\leq 6\pi\\ &\Leftrightarrow -6\pi+3+\pi<6k\pi\leq 6\pi+3+\pi\\ &\Leftrightarrow -5\pi+3<6k\pi\leq 7\pi+3\\ &\Leftrightarrow \frac{-5\pi+3}{6\pi}<k\leq\frac{7\pi+3}{6\pi}\end{aligned}$$

$\frac{-5\pi+3}{6\pi}\approx-0{,}68$ et $\frac{7\pi+3}{6\pi}\approx 1{,}33$.
Les valeurs possibles de k pour que $-\frac{3+\pi-6k\pi}{6}$ appartienne à $]-\pi;\pi]$ sont 0 et 1.
On a ainsi les solutions suivantes :

- $-\frac{3+\pi}{6}$
- $-\frac{3-5\pi}{6}=\frac{5\pi-3}{6}$

On procède de même pour la deuxième expression :

$$\begin{aligned}-\pi<-\frac{3+2\pi-6k\pi}{6}\leq\pi &\Leftrightarrow -6\pi<-3-2\pi+6k\pi\leq 6\pi\\ &\Leftrightarrow -4\pi+3<6k\pi\leq 8\pi+3\\ &\Leftrightarrow \frac{-4\pi+3}{6\pi}<k\leq\frac{8\pi+3}{6\pi}\end{aligned}$$

$\frac{-4\pi+3}{6\pi}\approx-0{,}51$ et $\frac{8\pi+3}{6\pi}\approx 1{,}49$.
Les valeurs de k telles que $-\frac{3+2\pi-6k\pi}{6}\in]-\pi;\pi]$ sont 0 et 1.
On obtient ainsi les solutions suivantes :

- $-\frac{3+2\pi}{6}$
- $-\frac{3+-4\pi}{6}=\frac{4\pi-3}{6}$

Finalement :

$$\boxed{S=\left\{-\frac{3+\pi}{6}\ ;\ -\frac{3+\pi}{6}\ ;\ \frac{4\pi-3}{6}\ ;\ \frac{5\pi-3}{6}\right\}}$$

15 Résoudre sur $]-\pi;\pi]$ l'équation $\cos(-2x+3)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned}\cos(-2x+3)=\frac{\sqrt{3}}{2} &\Leftrightarrow -2x+3=\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad\text{ou}\quad -2x+3=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad ,k\in\mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow -2x=\frac{\pi}{6}-3+2k\pi \quad\text{ou}\quad -2x=-\frac{\pi}{6}-3+2k\pi\\ &\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{12}+\frac{3}{2}-k\pi \quad\text{ou}\quad x=\frac{\pi}{12}+\frac{3}{2}-k\pi\\ &\Leftrightarrow x=\frac{-\pi+18-12k\pi}{12} \quad\text{ou}\quad x=\frac{\pi+18-12k\pi}{12}\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}-\pi<\frac{-\pi+18-12k\pi}{12}\leq\pi &\Leftrightarrow -12\pi<-\pi+18-12k\pi\leq 12\pi\\ &\Leftrightarrow -12\pi+\pi-18<-12k\pi\leq 12\pi+\pi-18\\ &\Leftrightarrow -11\pi-18<-12k\pi\leq 13\pi-18\\ &\Leftrightarrow \frac{-11\pi-18}{-12\pi}>k\geq\frac{13\pi-18}{-12\pi}\end{aligned}$$

  $\frac{-11\pi-18}{-12\pi}\approx 1{,}39$ et $\frac{13\pi-18}{-12\pi}\approx-0{,}61$.
  Donc les valeurs possibles pour k sont 0 et 1.
  On a donc comme solutions :

  ◇ $\frac{-\pi+18-12\times0\times\pi}{12}=\frac{-\pi+18}{12}$.

  ◇ $\frac{-\pi+18-12\times1\times\pi}{12}=\frac{-13\pi+18}{12}$.

- $$\begin{aligned}-\pi<\frac{\pi+18-12k\pi}{12}\leq\pi &\Leftrightarrow -12\pi<\pi+18-12k\pi\leq 12\pi\\ &\Leftrightarrow -12\pi-\pi-18<-12k\pi\leq 12\pi-\pi-18\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow -13\pi - 18 < -12k\pi \leq 11\pi - 18$$
$$\Leftrightarrow \frac{-13\pi - 18}{-12\pi} > k \geq \frac{11\pi - 18}{-12\pi}$$

$\frac{-13\pi-18}{-12\pi} \approx 1{,}56$ et $\frac{11\pi-18}{-12\pi} \approx -0{,}44$.
Donc les valeurs possibles pour k sont 0 et 1.
On a donc comme solutions :

- $\frac{\pi+18-12\times 0\times\pi}{12} = \frac{\pi+18}{12}$.
- $\frac{\pi+18-12\times 1\times\pi}{12} = \frac{-11\pi+18}{12}$.

Ainsi :

$$\boxed{S = \left\{\frac{-13\pi + 18}{12} ; \frac{-11\pi + 18}{12} ; \frac{-\pi + 18}{12} ; \frac{\pi + 18}{12}\right\}}$$

16 Résoudre sur $]-\pi;\pi]$ l'inéquation $\sin(x) > \frac{1}{2}$

Sans justification, on sait que $\boxed{S = \left]\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right[}$.

17 Résoudre sur $]-\pi;\pi]$ l'inéquation $\cos(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\boxed{S = \left]-\pi; -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}; \pi\right[}$$

18 Résoudre sur $]-\pi;\pi]$ l'inéquation $\cos(x) > -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\boxed{S = \left]-\frac{5\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right[}$$

19 Soit x un réel tel que $\cos(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Donner toutes les valeurs possibles pour $3x$
2. En déduire alors toutes les valeurs possibles pour x.
3. En déduire les solutions de l'équation $\cos(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

1. $\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi\}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
2. $\{-\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}; \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\}$, $k \in \mathbb{Z}$.
3. On remplace k par des valeurs telles que $-\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$ ou $\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$ appartient à $]-\pi;\pi]$.

$$\boxed{S = \left\{-\frac{13\pi}{18}; -\frac{11\pi}{18}; -\frac{\pi}{18}; \frac{\pi}{18}; \frac{11\pi}{18}; \frac{13\pi}{18}\right\}}$$