3 Applications de la dérivation

I Sens de variation

Propriété 3.1 – Signe de la dérivée et sens de variation

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

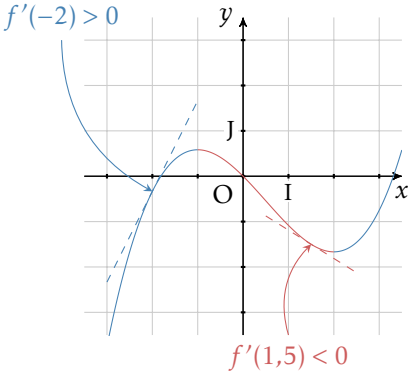
- f est **strictement croissante** sur I **ssi** f' est **strictement positive** sur I, sauf pour un nombre fini de réels pour lesquels elle s'annule.
- f est **strictement décroissante** sur I **ssi** f' est **strictement négative** sur I, sauf pour un nombre fini de réels pour lesquels elle s'annule.
- f est constante sur I **ssi** $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

Remarque 3.1. Autrement dit, le signe de la dérivée donne le sens de variation de la fonction.

Rappel 3.1. Au point A d'abscisse a, la tangente à $\mathscr{C}_f$ a pour coefficient directeur $f'(a)$.

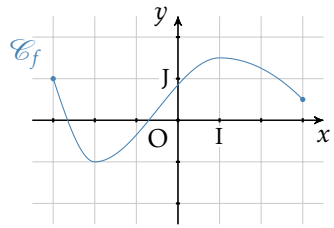
Illustration

Sur la figure ci-contre, on voit que le coefficient directeur des tangentes à la courbe représentative de la fonction est positif sur les intervalles où la fonction est croissante, et négatif sur les intervalles où la fonction est décroissante.



Exemple 3.1. Soit $f : x \mapsto x^3$ définie sur $\mathbb{R}$.
Quel est le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$?
$f'(x) = 3x^2$.
f' est strictement positive pour tout $x \neq 0$ et s'annule en 0.
Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple 3.2.
Soit f une fonction définie et dérivable sur $[-3;3]$ dont la courbe est tracée ci-dessous.



Déterminer graphiquement le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.
f est décroissante sur $[-3;-2]$, ainsi que sur $[1;3]$, donc $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in [-3;-2] \cup [1;3]$.
Inversement, $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in [-2;1]$.

Exemple 3.3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.
Dresser le tableau de variations de f (on pourra ensuite contrôler le résultat en traçant la courbe représentative de f sur l'écran de la calculatrice).
$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$.
$\Delta = b^2 - 4ac = 144$.
$\Delta > 0$ donc le polynôme $3x^2 - 6x - 9$ a deux racines réelles.
Après calcul, on trouve $x_1 = 3$ et $x_2 = -1$.
De plus, $a = 3 > 0$, ainsi :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	6	↘	-26	↗	

On complète le tableau avec les images que l'on peut calculer : $f(3)$ et $f(-1)$.
$f(3) = -26$ et $f(-1) = 6$.

Exercices : A

II Extremum d'une fonction

Définition 3.1 – Extremum local

Soient I un intervalle ouvert, c un réel de I et f une fonction définie sur I .
On dit que $f(c)$ est un **maximum local** (resp. un **minimum local**) de f au voisinage de c lorsqu'il existe deux réels a et b de I tels que $c \in]a;b[$, et pour tous réels $x \in]a;b[$, $f(x) \leq f(c)$ (resp. $f(x) \geq f(c)$).

Remarque 3.2. Il s'agit de l'image la plus grande ou la plus petite sur une partie d'un ensemble.

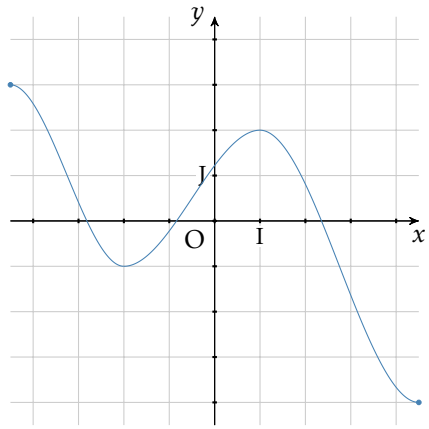
Définition 3.2 – Extremum global

Soit f une fonction définie sur $I \subseteq \mathbb{R}$, et c un réel de I.
On dit que $f(c)$ est le **maximum global** (resp. **minimum global**) de f si pour tout $x \in I$, $\boldsymbol{f(x) \leq f(c)}$ (resp. $\boldsymbol{f(x) \geq f(c)}$).

Remarque 3.3. Il s'agit de l'image la plus grande ou la plus petite sur la totalité d'un ensemble.

Remarque 3.4. Un extremum global est un extremum local, mais un extremum local n'est pas forcément un extremum global.

Exemple 3.4. Soit f une fonction définie sur $\left[-\frac{9}{2};\frac{9}{2}\right]$, dont la courbe représentative est tracée ci-dessous.



1. Donner un minimum local et le minimum global de f sur $\left[-\frac{9}{2};\frac{9}{2}\right]$.
   -1 est un minimum local de f au voisinage de -2.
   -4 est le minimum global de f sur $\left[-\frac{9}{2};\frac{9}{2}\right]$.
2. Donner un maximum local et le maximum global, de f sur $\left[-\frac{9}{2};\frac{9}{2}\right]$.
   2 est un maximum local de f au voisinage de 1.
   3 est le maximum global de f sur $\left[-\frac{9}{2};\frac{9}{2}\right]$.

Propriété 3.2

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et c un réel de I.
Si $f(c)$ est un extremum local de f, alors $\boldsymbol{f'(c) = 0}$.

Remarque 3.5. La réciproque est fausse. Soit par exemple $f : x \mapsto x^3$.
$f'(0) = 0$, mais $f(0)$ n'est pas un extremum de f.

Propriété 3.3

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et c un réel de I.
Si f' s'annule en c **en changeant de signes**, alors $f(c)$ est un extremum local de f.

Exemple 3.5.
Déterminer le maximum et le minimum de $f : x \mapsto x^3 - \frac{15x^2}{2} + 12x$ sur $[-1;5]$.
$f'(x) = 3x^2 - 15x + 12 = 3(x-4)(x-1)$.
On étudie le signe de chacun des facteurs.
On en déduit :

x	-1		1		4		5
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	-1		1		4		5
$f(x)$	$-\frac{41}{2}$	$\nearrow$	$\frac{11}{2}$	$\searrow$	-8	$\nearrow$	$-\frac{5}{2}$

Exercices : B