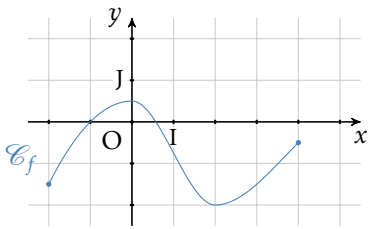
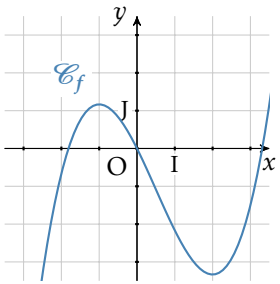
A Signe de la dérivée et sens de variation d'une fonction

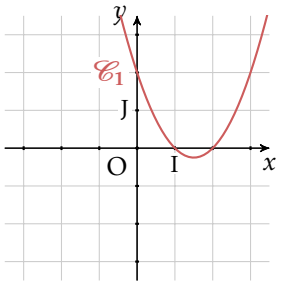
A.1 Faire ses gammes

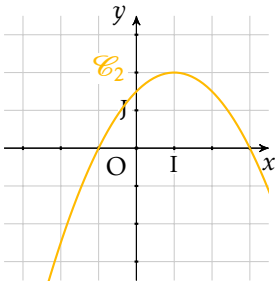
1 Soit f une fonction définie et dérivable sur $[-2;4]$ dont la courbe est tracée ci-dessous.
Dresser le tableau de signes de la dérivée de f.

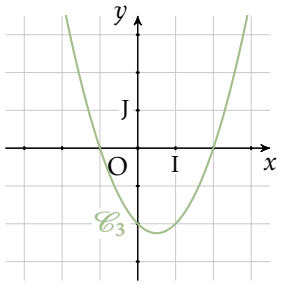


2 On a tracé ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f.
Laquelle des courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ est susceptible de représenter f' ?

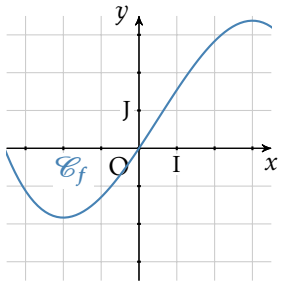


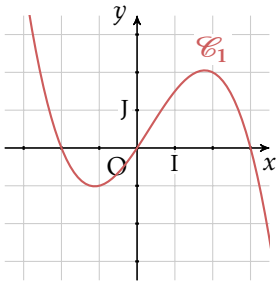


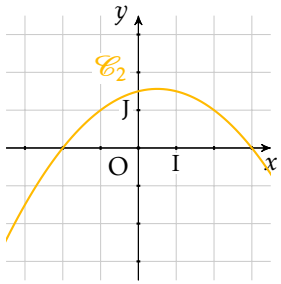


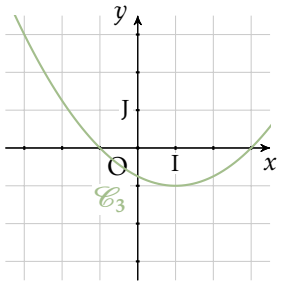


3 On a tracé ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f.
Laquelle des courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ est susceptible de représenter f' ?









4 **Du signe de la dérivée au tableau de variations**
Soit f une fonction définie et dérivable sur $I = [0;+\infty[$.
On a dressé le tableau de signes de f'.

x	0		4		7		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dresser le tableau de variations de f.

5 Soit f une fonction définie et dérivable sur $I = [2;9]$.
On a dressé le tableau de signes de f'.

x	2		4		8		9
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dresser le tableau de variations de f.

A.2 Exercices d'entraînement

6 **De l'expression au tableau de variation**
Dresser le tableau de variations des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 3x^2 - 3$
2. $f(x) = -5x^2 + 3x + 2$
3. $f(x) = -x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x$

4. $f(x) = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x + 1$

7 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + 3$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que $f'(x) = 4x(x-1)(x+2)$.
2. Dresser le tableau de variations de f.

8 Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$.

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$ et l'ensemble de dérivabilité de f.
2. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
3. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathcal{D}_f$.

9 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1}$$

1. Calculer $g'(x)$.
2. Étudier le signe de $g'(x)$ et dresser le tableau de variations de g.
3. Déterminer un encadrement de $g(x)$ sur chacun des intervalles :
   (a) $[0;1]$ (b) $[-1;3]$ (c) $[-1;1]$ (d) $\left[-\sqrt{3};0\right]$
4. Calculer $g(\sqrt{3})$ puis résoudre, à l'aide du tableau de variations l'inéquation $g(x) \leq 0$.

10 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 5x - 6$.

1. Démontrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que $f(1) = 0$.
3. Étudier le signe de $f(x)$.

11 Soit f la fonction définie par $f(x) = x - 1 + \frac{4}{x-2}$.

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$ et l'ensemble de dérivabilité de f.
2. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
3. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathcal{D}_f$.

12 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{-x^2+8x-13}{x^2-4x+5}$.

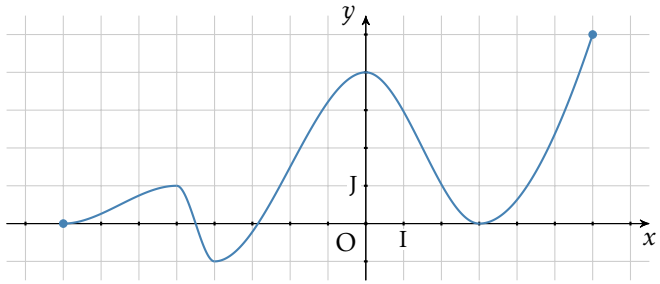
1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{-4(x-1)(x-3)}{(x^2-4x+5)^2}$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f.

B Extremum d'une fonction

B.1 Faire ses gammes

13 **Extremums d'une fonction**

Soit f une fonction définie sur $[-8;6]$, que l'on a représentée ci-dessous.



1. Déterminer un maximum local de f.
2. Déterminer un minimum local de f.
3. Déterminer le maximum global de f.
4. Déterminer le minimum global de f.

14 Soit f une fonction définie et dérivable sur $[-2;6]$ dont on a dressé le tableau de variations.

x	-2		0		1		6
$f(x)$	-1	↗	4	↘	2	↗	5

Déterminer le minimum et le maximum de f sur $[-2;6]$.

B.2 Exercices d'entraînement

15 Soit f une fonction définie sur $\left[0;\frac{5}{2}\right]$ par $f(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 2x$.
Déterminer le minimum et le maximum de f sur son ensemble de définition. *On donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.*

16 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 12x + 12$$

On note f' la dérivée de f et f'' la dérivée de f' sur $\mathbb{R}$.

1. (a) Justifier que f puis f' sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

(b) Déterminer $f''(x)$.

2. Étudier le signe de $f''(x)$ puis en déduire le tableau de variations de f' sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer $f'(1)$ puis donner le signe de $f'(x)$ en fonction de x.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. En déduire le ou les extremums de f sur $\mathbb{R}$.

★★☆☆ **17** Une boîte sans couvercle a la forme d'un parallélépipède rectangle. Sa base est un carré de côté x (exprimé en mètres) avec $x > 0$. Le volume de la boîte est égal à $10\,\text{m}^3$.
La base est fabriquée à l'aide d'un matériau qui coûte 5 € par mètre carré, tandis que les faces latérales sont construites à l'aide d'un matériau qui coûte 2 € par mètre carré.
On note h la hauteur de la boîte et C le coût de fabrication d'une boîte.

1. Exprimer h en fonction de x.
2. Montrer que, pour tout $x > 0$, $C(x) = \frac{5(x^3+16)}{x}$.
3. On note C' la fonction dérivée de C.
   Montrer que pour tout $x > 0$, $C'(x) = \frac{10(x^3-8)}{x^2}$.
4. Étudier les variations de la fonction C puis trouver les dimensions de la boîte pour lesquelles le coût de fabricationi est minimal.