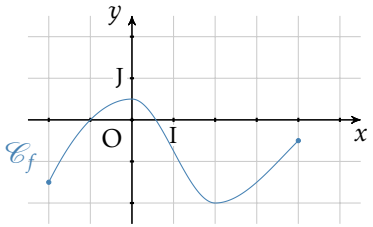
# A Signe de la dérivée et sens de variation d'une fonction

## A.1 Faire ses gammes

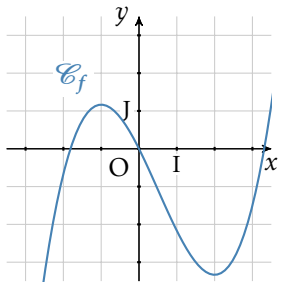
☆☆ **1** Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur $[-2;4]$ dont la courbe est tracée ci-dessous.
Dresser le tableau de signes de la dérivée de $f$.

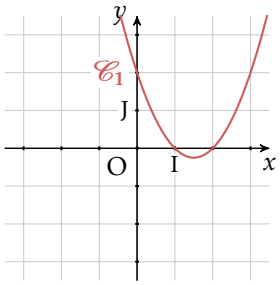


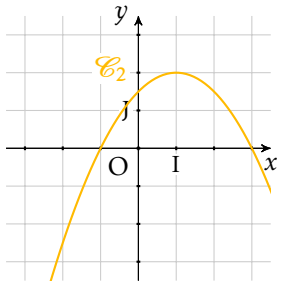

$f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in [0;2]$.
$f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in [-2;0] \cup [2;4]$.

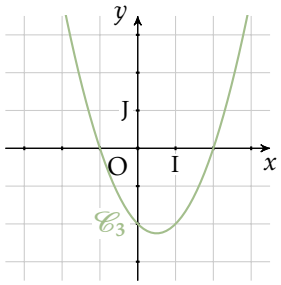
| $x$ | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

☆☆ **2** On a tracé ci-dessous la courbe représentative d'une fonction $f$.
Laquelle des courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ est susceptible de représenter $f'$ ?



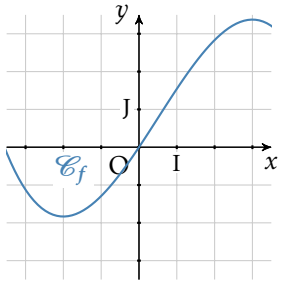



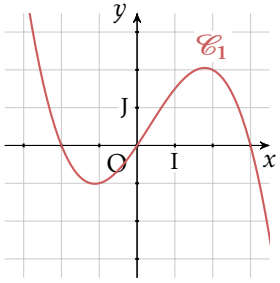



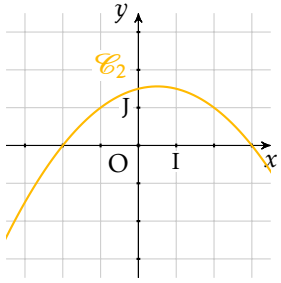



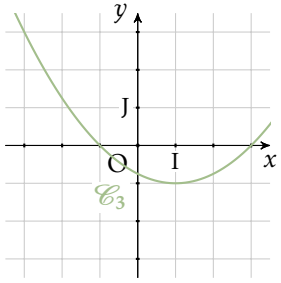

On cherche la courbe qui est située au-dessus de l'axe des abscisses lorsque $f$ est croissante, et en-dessous lorsque $f$ est décroissante.
La seule courbe vérifiant ces critères est la courbe $\mathscr{C}_3$.

☆☆ **3** On a tracé ci-dessous la courbe représentative d'une fonction $f$.
Laquelle des courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ est susceptible de représenter $f'$ ?




On cherche la courbe qui est située au-dessus de l'axe des abscisses lorsque $f$ est croissante, et en-dessous lorsque $f$ est décroissante.
La seule courbe vérifiant ces critères est la courbe $\mathscr{C}_2$.

☆☆ **4** **Du signe de la dérivée au tableau de variations**
Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur $I = [0;+\infty[$.
On a dressé le tableau de signes de $f'$.

Version corrigée

| $x$ | $0$ | | $4$ | | $7$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Dresser le tableau de variations de $f$.

| $x$ | $0$ | | $4$ | | $7$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | | ↗ | | ↘ | |

☆☆ 5 Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur $I = [2;9]$.
On a dressé le tableau de signes de $f'$.

| $x$ | $2$ | | $4$ | | $8$ | | $9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Dresser le tableau de variations de $f$.

| $x$ | $2$ | | $4$ | | $8$ | | $9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | |

## A.2 Exercices d'entraînement

★☆ **6 De l'expression au tableau de variation**

Dresser le tableau de variations des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 3x^2 - 3$
2. $f(x) = -5x^2 + 3x + 2$
3. $f(x) = -x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x$
4. $f(x) = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x + 1$

1.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | $-3$ | ↗ | |

2.

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{3}{10}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | $\frac{49}{20}$ | ↘ | |

3.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\frac{2}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | $-\frac{3}{2}$ | ↗ | $\frac{22}{27}$ | ↘ | |

$f'(x) = 3x^2 + 5x - 2$.
$\Delta = 5^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 49$.
$\Delta > 0$, donc le polynôme a deux racines réelles.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5-7}{2\times 3} = -2 \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5+7}{2\times 3} = \frac{1}{3}$$

Le trinôme est du signe de $a$ sauf entre les racines, d'où le tableau suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $\frac{1}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | $7$ | ↘ | $\frac{35}{54}$ | ↗ | |

4.
$f(-2) = (-2)^3 + \frac{5}{2} \times (-2)^2 - 2 \times (-2) + 1 = -8 + 10 + 4 + 1 = 7$
$f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} + \frac{5}{2} \times \frac{1}{9} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{2}{54} + \frac{15}{54} - \frac{36}{54} + \frac{54}{54} = \frac{35}{54}$.

★☆ 7 Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + 3$.

1. Justifier que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que $f'(x) = 4x(x-1)(x+2)$.
2. Dresser le tableau de variations de $f$.

$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
$f'(x) = 4x^3 + 4x^2 - 8x$.

$$\begin{aligned} 4x(x-1)(x+2) &= (4x^2 - 4x)(x+2) \\ &= 4x^3 + 8x^2 - 4x^2 - 8x \\ &= 4x^3 + 4x^2 - 8x \\ &= f'(x) \end{aligned}$$

On étudie le signe de $f'(x)$ en étudiant le signe de chacun des facteurs.
$4x < 0 \Leftrightarrow x > 0$.
$x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.
$x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$.
Le signe de $f'(x)$ résulte du signe du produit de ces deux facteurs.
On résume dans un tableau de signes dont on sert également pour déduire les variations de $f$.
Sous les valeurs "clés", on indique l'image par la fonction $f$ (à calculer).

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4x$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x+2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $-\frac{23}{3}$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $\frac{4}{3}$ | $\nearrow$ | |

★☆☆ **8** Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$.

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$ et l'ensemble de dérivabilité de $f$.
2. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
3. En déduire le tableau de variations de $f$ sur $\mathcal{D}_f$.

1. $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $\begin{cases} u(x) = x+2 \\ v(x) = x-1 \end{cases}$.
   $u$ et $v$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.
   $v(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
   Donc $f$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
2. On a $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$.
   Ainsi :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{1 \times (x-1) - (x+2) \times 1}{(x-1)^2} \\ &= -\frac{3}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

   Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x-1)^2 \geq 0$.
   Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \leq 0$.
3.

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | ‖ | $-$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | ‖ | $\searrow$ | |

★☆☆ **9** Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1}$$

1. Calculer $g'(x)$.
2. Étudier le signe de $g'(x)$ et dresser le tableau de variations de $g$.
3. Déterminer un encadrement de $g(x)$ sur chacun des intervalles :
   (a) $[0;1]$ (b) $[-1;3]$ (c) $[-1;1]$ (d) $\left[-\sqrt{3};0\right]$
4. Calculer $g(\sqrt{3})$ puis résoudre, à l'aide du tableau de variations l'inéquation $g(x) \leq 0$.

1. $g(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2 - 3 \\ v(x) = x^2 + 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(x) = 2x \\ v'(x) = 2x \end{cases}$.
   Ainsi :

$$g'(x) = \frac{2x(x^2+1) - (x^2-3) \times 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x^3 + 2x - 2x^3 + 6x}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{8x}{(x^2+1)^2}$$

2. Pour tout réel $x$, $(x^2+1)^2 > 0$.
   $8x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.
   Ainsi :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $8x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $(x^2+1)^2$ | | $+$ | | $+$ | |
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | ↘ | $-3$ | ↗ | |

   $g(0) = -3$.
3. On a : $g(1) = -1$, $g(-1) = -1$, $g(3) = \frac{3}{5}$ et $g(-\sqrt{3}) = 0$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{3}$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | ↘ | $0$ | ↘ | $-1$ | ↘ | $-3$ | ↗ | $-1$ | ↗ | $\frac{3}{5}$ | ↗ | |

   Ainsi :
   (a) $-3 \leq g(x) \leq -1$.
   (b) $-3 \leq g(x) \leq \frac{3}{5}$.
   (c) $-3 \leq g(x) \leq -1$.
   (d) $-3 \leq g(x) \leq 0$.
4. $g(\sqrt{3}) = 0$. Ainsi :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{3}$ | | $0$ | | $\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | ↘ | $0$ | ↘ | $-3$ | ↗ | $0$ | ↗ | |

On en déduit que l'ensemble de solutions de l'inéquations $g(x) \leq 0$ est $S = \left[-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right]$.

★★☆ **10** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 5x - 6$.

1. Démontrer que $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que $f(1) = 0$.
3. Étudier le signe de $f(x)$.

1. $f'(x) = 3x^2 + 5$.
   Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$.
   Donc pour tout réel $x$, $3x^2 + 5 > 0$.
   Donc $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. $f(1) = 1 + 5 - 6 = 0$.
3.

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | $0$ | ↗ | |

   $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in ]-\infty; 1]$ et $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [1; +\infty[$.

★★☆ **11** Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = x - 1 + \frac{4}{x-2}$.

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$ et l'ensemble de dérivabilité de $f$.
2. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
3. En déduire le tableau de variations de $f$ sur $\mathcal{D}_f$.

1. La fonction $x \mapsto x - 1$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   La fonction $x \mapsto \frac{4}{x-2}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
   Donc $f$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ en tant que somme de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
2. $f(x) = x - 1 + \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $\begin{cases} u(x) = 4 \\ v(x) = x - 2 \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(x) = 0 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$.
   Ainsi :
$$f'(x) = 1 + \frac{0 \times (x-2) - 4 \times 1}{(x-2)^2}$$

$$= 1 - \frac{4}{(x-2)^2}$$
$$= \frac{(x-2)^2}{(x-2)^2} - \frac{4}{(x-2)^2}$$
$$= \frac{(x-2)^2 - 4}{(x-2)^2}$$
$$= \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$$
$$= \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$

$x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 4$.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x-2)^2 \geq 0$.
Ainsi :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x-4$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $(x-2)^2$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

3. $f(0) = 0 - 1 + \frac{4}{0-2} = -1 - 2 = -3$.
$f(4) = 4 - 1 + \frac{4}{4-2} = 3 + 2 = 5$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | $-3$ | ↘ | ‖ | ↘ | $5$ | ↗ | |

☆☆ **12** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{-x^2+8x-13}{x^2-4x+5}$.

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{-4(x-1)(x-3)}{(x^2-4x+5)^2}$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de $f$.

1. $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $\begin{cases} u(x) = -x^2 + 8x - 13 \\ v(x) = x^2 - 4x + 5 \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(x) = -2x + 8 \\ v'(x) = 2x - 4 \end{cases}$.

Ainsi :

$$f'(x) = \frac{(-2x+8)(x^2-4x+5) - (-x^2+8x-13)(2x-4)}{(x^2-4x+5)^2}$$
$$= \frac{-2x^3 + 8x^2 - 10x + 8x^2 - 32x + 40 + \dots}{(x^2-4x+5)^2}$$
$$\frac{\dots + 2x^3 + 4x^2 + 16x^2 - 32x - 26x + 52}{(x^2-4x+5)^2}$$
$$= \frac{-2x^3 + 16x^2 - 42x + 40 + 2x^3 - 20x^2 + 58x - 52}{(x^2-4x+5)^2}$$
$$= \frac{-4x^2 + 16x - 12}{(x^2-4x+5)^2}$$

$$-4(x-1)(x-3) = (-4x+4)(x-3)$$
$$= -4x^2 + 12x + 4x - 12$$
$$= -4x^2 + 16x - 12$$

Donc on a bien $f'(x) = \frac{-4(x-1)(x-3)}{(x^2-4x+5)^2}$.

2. $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.
$x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x^2-4x+5)^2 \geq 0$.
Ainsi :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-4$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | |
| $x-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x-3$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $(x^2-4x+5)^2$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | $-3$ | ↗ | $1$ | ↘ | |

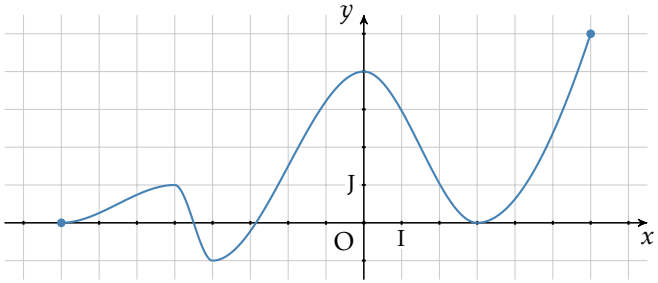
$f(1) = -3$ et $f(3) = 1$.

# B Extremum d'une fonction

## B.1 Faire ses gammes

### ☆☆ 13 Extremums d'une fonction

Soit $f$ une fonction définie sur $[-8;6]$, que l'on a représentée ci-dessous.




1. Déterminer un maximum local de $f$.
2. Déterminer un minimum local de $f$.
3. Déterminer le maximum global de $f$.
4. Déterminer le minimum global de $f$.

1. 1 est un maximum local de $f$ au voisinage de $-5$.
2. 0 est un minimum local de $f$ au voisinage de 3.
3. Le maximum global de $f$ est 5, atteint en 6.
4. Le minimum global de $f$ est $-1$, atteint en $-4$.

### ☆☆ 14

Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur $[-2;6]$ dont on a dressé le tableau de variations.

| $x$ | $-2$ | | $0$ | | $1$ | | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | ↗ | $4$ | ↘ | | ↗ | $5$ |
| | $-1$ | | | | $2$ | | |

Déterminer le minimum et le maximum de $f$ sur $[-2;6]$.

Le maximum de $f$ est 5, atteint en 6, et le minimum global de $f$ est $-1$, atteint en $-2$.

## B.2 Exercices d'entraînement

### ☆☆ 15

Soit $f$ une fonction définie sur $\left[0;\frac{5}{2}\right]$ par $f(x)=\frac{2x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+2x$.
Déterminer le minimum et le maximum de $f$ sur son ensemble de définition. *On donnera une valeur approchée à $10^{-2}$ près.*

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $2$ | | $\frac{5}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $\frac{11}{24}$ | ↘ | $-\frac{2}{3}$ | ↗ | $-\frac{5}{24}$ |

### ☆☆ 16

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=3x^4-4x^3+6x^2-12x+12$$

On note $f'$ la dérivée de $f$ et $f''$ la dérivée de $f'$ sur $\mathbb{R}$.

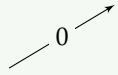
1. (a) Justifier que $f$ puis $f'$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer $f''(x)$.
2. Étudier le signe de $f''(x)$ puis en déduire le tableau de variations de $f'$ sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer $f'(1)$ puis donner le signe de $f'(x)$ en fonction de $x$.
4. Dresser le tableau de variations de $f$.
5. En déduire le ou les extremums de $f$ sur $\mathbb{R}$.

1. (a) $f$ et $f'$ sont toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$ en tant que polynômes.
   (b) $f'(x)=12x^3-12x^2+12x-12$.
   $f''(x)=36x^2-24x+12$.
2.
$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &=(-24)^2-4\times 36\times 12\\ &=576-4\times 432\\ &=576-1728\\ &=-1152\end{aligned}$$

$\Delta<0$, donc $f''(x)$ n'a pas de racine réelle.
$36>0$. Ainsi :

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | | | |

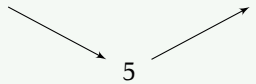
3. $f'(1) = 12\times 1^3 - 12\times 1^2 + 12\times 1 - 12 = 0$. Ainsi :

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | |  $0$ | |

On en déduit :

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |

4. $f(1) = 5$.

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ |  | $5$ | |

★☆☆ **17** Une boîte sans couvercle a la forme d'un parallélépipède rectangle. Sa base est un carré de côté $x$ (exprimé en mètres) avec $x > 0$. Le volume de la boîte est égal à $10\ \text{m}^3$.
La base est fabriquée à l'aide d'un matériau qui coûte $5$€ par mètre carré, tandis que les faces latérales sont construites à l'aide d'un matériau qui coûte $2$€ par mètre carré.
On note $h$ la hauteur de la boîte et $C$ le coût de fabrication d'une boîte.

1. Exprimer $h$ en fonction de $x$.
2. Montrer que, pour tout $x > 0$, $C(x) = \frac{5(x^3+16)}{x}$.
3. On note $C'$ la fonction dérivée de $C$.
   Montrer que pour tout $x > 0$, $C'(x) = \frac{10(x^3-8)}{x^2}$.
4. Étudier les variations de la fonction $C$ puis trouver les dimensions de la boîte pour lesquelles le coût de fabricationi est minimal.

1. Le volume de la boîte est égal à $base \times hauteur$, soit ici : $\mathcal{V} = x^2 \times h$.
   Or on sait que $\mathcal{V} = 10$.

$$\begin{aligned}\mathcal{V} = 10 &\Leftrightarrow x^2 \times h = 10\\ &\Leftrightarrow h = \frac{10}{x^2}\end{aligned}$$

2. Le coût de la base est égal à $5x^2$.
   Chacune des faces latérales a pour surface $x \times h = x \times \frac{10}{x^2} = \frac{10}{x}$.
   Ainsi le coût de chaque face est égal à $2 \times \frac{10}{x} = \frac{20}{x}$.
   On a donc :

$$\begin{aligned}C(x) &= 5x^2 + 4\times\frac{20}{x}\\ &= 5x^2 + \frac{80}{x}\\ &= \frac{5x^3}{x} + \frac{80}{x}\\ &= \frac{5x^3+80}{x}\\ &= \frac{5(x^3+16)}{x}\end{aligned}$$

3. $C(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $\begin{cases}u(x) = 5(x^3+16)\\ v(x) = x\end{cases}$ et $\begin{cases}u'(x) = 15x^2\\ v'(x) = 1\end{cases}$.
   Ainsi :

$$\begin{aligned}C'(x) &= \frac{15x^2\times x - 5(x^3+16)\times 1}{x^2}\\ &= \frac{15x^3 - 5x^3 - 80}{x^2}\\ &= \frac{10x^3-80}{x^2}\\ &= \frac{10(x^3-8)}{x^2}\end{aligned}$$

4. Pour tout réel $x > 0$, $x^2 > 0$.

$$\begin{aligned}x^3 - 8 > 0 &\Leftrightarrow x^3 > 8\\ &\Leftrightarrow x > 2\end{aligned}$$

Ainsi :

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $10(x^3-8)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x^2$ | | $+$ | | $+$ | |
| $C'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $C(x)$ | ‖ | ↘ | $60$ | ↗ | |

$C(2) = \frac{5(2^3+16)}{2} = 60$.
Le coût est donc minimal pour $x = 2$.
On a alors $h = \frac{10}{2^2} = \frac{5}{2} = 2,5$.
Les dimensions idéales sont donc $2\text{m} \times 2\text{m} \times 2,5\text{m}$.