3 Applications de la dérivation

I Sens de variation

Propriété 3.1 – Signe de la dérivée et sens de variation

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

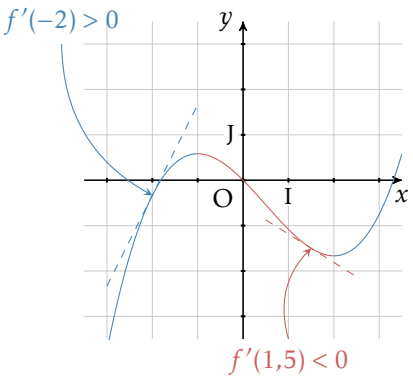
- f est _____ sur I **ssi** f' est _____ _____ sur I, sauf pour un nombre fini de réels pour lesquels elle s'annule.
- f est _____ sur I **ssi** f' est _____ _____ sur I, sauf pour un nombre fini de réels pour lesquels elle s'annule.
- f est constante sur I **ssi** $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

Remarque 3.1. Autrement dit, le signe de la dérivée donne le sens de variation de la fonction.

Rappel 3.1. Au point A d'abscisse a, la tangente à $\mathscr{C}_f$ a pour coefficient directeur $f'(a)$.

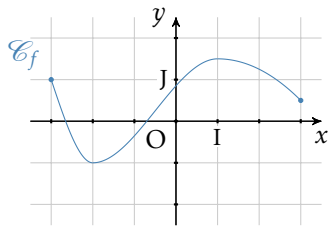
Illustration

Sur la figure ci-contre, on voit que le coefficient directeur des tangentes à la courbe représentative de la fonction est positif sur les intervalles où la fonction est croissante, et négatif sur les intervalles où la fonction est décroissante.



Exemple 3.1. Soit $f : x \mapsto x^3$ définie sur $\mathbb{R}$.
Quel est le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$?

Exemple 3.2.
Soit f une fonction définie et dérivable sur $[-3;3]$ dont la courbe est tracée ci-dessous.



Déterminer graphiquement le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

Exemple 3.3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.
Dresser le tableau de variations de f (on pourra ensuite contrôler le résultat en traçant la courbe représentative de f sur l'écran de la calculatrice).

Exercices : A

II Extremum d'une fonction

Définition 3.1 – Extremum local

Soient I un intervalle ouvert, c un réel de I et f une fonction définie sur I .
On dit que $f(c)$ est un _____ (resp. un _____) de f au voisinage de c lorsqu'il existe deux réels a et b de I tels que $c \in]a;b[$, et pour tous réels $x \in]a;b[$, $f(x) \ldots f(c)$ (resp. $f(x) \ldots f(c)$).

Remarque 3.2. Il s'agit de l'image la plus grande ou la plus petite sur une partie d'un ensemble.

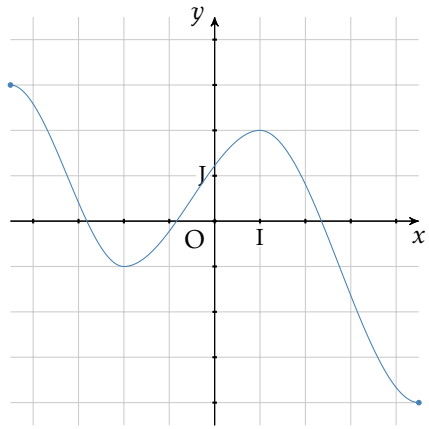
Définition 3.2 – Extremum global

Soit f une fonction définie sur $I \subseteq \mathbb{R}$, et c un réel de I.
On dit que $f(c)$ est le _____ (resp. _____) de f si pour tout $x \in I$, ... (resp. .....).

Remarque 3.3. Il s'agit de l'image la plus grande ou la plus petite sur la totalité d'un ensemble.

Remarque 3.4. Un extremum global est un extremum local, mais un extremum local n'est pas forcément un extremum global.

Exemple 3.4. Soit f une fonction définie sur $\left[-\frac{9}{2};\frac{9}{2}\right]$, dont la courbe représentative est tracée ci-dessous.



1. Donner un minimum local et le minimum global de f sur $\left[-\frac{9}{2};\frac{9}{2}\right]$.
2. Donner un maximum local et le maximum global, de f sur $\left[-\frac{9}{2};\frac{9}{2}\right]$.

Propriété 3.2

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et c un réel de I.
Si $f(c)$ est un extremum local de f, alors .....

Remarque 3.5. La réciproque est fausse. Soit par exemple $f : x \mapsto x^3$.
$f'(0) = 0$, mais $f(0)$ n'est pas un extremum de f.

Propriété 3.3

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et c un réel de I.
Si f' s'annule en c _____ , alors $f(c)$ est un extremum local de f.

Exemple 3.5.
Déterminer le maximum et le minimum de $f : x \mapsto x^3 - \frac{15x^2}{2} + 12x$ sur $[-1;5]$.

Exercices : B