2 Dérivation

I Nombre dérivé et tangente

I.1 Taux de variation

Définition 2.1 – Taux de variation

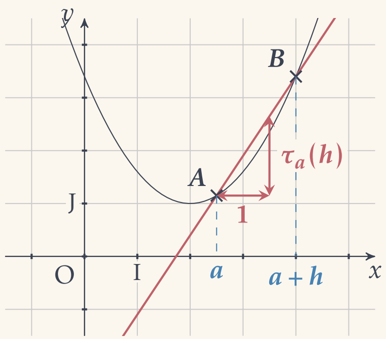
Soient f une fonction définie sur un intervalle I, a un réel de I et $h \in \mathbb{R}^*$.
Le **taux de variation** (ou ***taux d'accroissement***) de f entre a et $a+h$, noté $\boldsymbol{\tau_a(h)}$, est défini par :

$$\tau_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Rappel 2.1. Le **coefficient directeur** de la droite (AB) est égal à :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Remarque 2.1. Soient $A\big(a\,;\,f(a)\big)$ et $B\big(a+h\,;\,f(a+h)\big)$.
Le taux de variation de f entre a et $a+h$ correspond au coefficient directeur de la droite (AB).



I.2 Nombre dérivé

Définition 2.2 – Dérivabilité et nombre dérivé

Soient f définie sur un intervalle I, a un réel de I et h un réel non nul.
f est dite **dérivable en a** lorsque $\tau_a(h)$ se rapproche d'un nombre réel quand h se rapproche de 0.
Cette limite du taux de variation, lorsque h tend vers 0 est appelée **nombre dérivé de f en a**.
On le note $\boldsymbol{f'(a)}$ et on écrit :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Remarque 2.2. f' se lit « f prime ».
$\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ se lit « limite quand h tend vers 0 de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ».

Remarque 2.3. On note $\lim\limits_{h\to 0^-}$ la limite lorsque h se rapproche de 0 en étant négatif et $\lim\limits_{h\to 0^+}$ la limite lorsque h tend vers 0 en étant positif.
Dans certains cas, que nous verrons en exercice, on a $\lim\limits_{h\to 0^-} \tau_a(h) \neq \lim\limits_{h\to 0^+} \tau_a(h)$ et la fonction n'est alors pas dérivable en a.

Exemple 2.1. Soit la fonction $f : x \mapsto x^2 + 1$.

1. Exprimer en fonction de h le taux de variation de f entre 2 et $2+h$.
   $\tau_2(h) = \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2+1-(2^2+1)}{h} = \frac{4+4h+h^2+1-5}{h} = \frac{4h+h^2}{h} = \frac{h(4+h)}{h} = 4+h.$
2. En déduire si la fonction carré est dérivable en 2, et si oui, donner la valeur de $f'(2)$.
   $\lim\limits_{h\to 0} 4+h = 4$, donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = 4$.

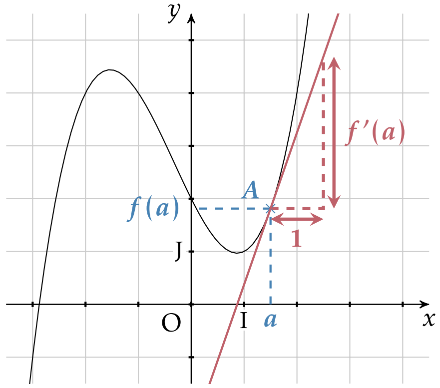
I.3 Tangente

Définition 2.3 – Tangente à une courbe en un point

Soit f définie sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
La **tangente** à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a est la droite passant par A, de coefficient directeur $\boldsymbol{f'(a)}$.

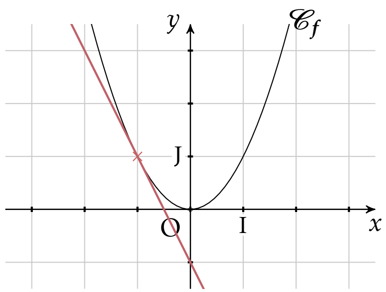
Illustration

Sur le graphique ci-contre, on a tracé la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A.



Exemple 2.2. Soit $f : x \mapsto x^2$.

1. Calculer $f'(-1)$.
   $\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \frac{(-1+h)^2-(-1)^2}{h} = \frac{1-2h+h^2-1}{2} = \frac{h(-2+h)}{h} = -2+h$.
   D'où : $f'(-1) = \lim\limits_{h\to 0} -2+h = -2$.
2. Quel est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1 ?
   Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1 est $f'(-1)$, soit -2.
3. Tracer cette tangente sur le graphique ci dessous.



Propriété 2.1 – Équation de la tangente

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en un réel a de I.
L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est :

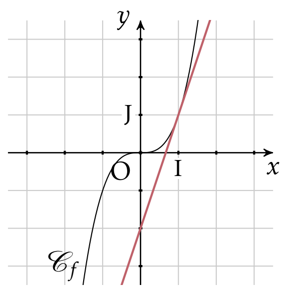
$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Rappel 2.2. L'équation réduite d'une droite $\mathcal{D}$ du plan est de la forme $y = mx + p$, où m est le **coefficient directeur** de $\mathcal{D}$ et p son **ordonnée à l'origine**.

Démonstration

Voir exercices □

Exemple 2.3. Soit $f : x \mapsto x^3$.



1. Déterminer graphiquement $f(1)$.
   $f(1) = 1$
2. Sachant que $f'(1) = 3$, déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 1.

$$\begin{aligned} y = f'(1)(x-1) + f(1) &\Leftrightarrow y = 3(x-1)+1 \\ &\Leftrightarrow y = 3x-2 \end{aligned}$$

3. Tracer cette tangente.

Exercices : A

II Fonction dérivée

Définition 2.4

Soit f définie et dérivable sur un intervalle I.
La fonction dérivée de f, notée f', est la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$.

Remarque 2.4. C'est la fonction qui à toute valeur x associe le nombre dérivé $f'(x)$, i.e le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x.

II.1 Dérivées usuelles

Propriété 2.2

Le tableau suivant donne les dérivées des fonctions usuelles :

Fonction f	Ensemble de définition	Dérivée f'	f est dérivable sur

$f(x)=k,\ k\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=1$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=2x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x)=\frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x)=-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x)=\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^*_+$

Remarque 2.5. On peut retrouver la formule $\left(\frac{1}{x^n}\right)'=-\frac{n}{x^{n+1}}$ à partir de $(x^n)'=nx^{n-1}$.
En effet : $\frac{1}{x^n}=x^{-n}$.
$\left(\frac{1}{x^n}\right)'=(x^{-n})'=-nx^{-n-1}=-nx^{-(n+1)}=-\frac{n}{x^{n+1}}$.

II.2 Opérations de base sur les dérivées

Propriété 2.3 – Opérations

Soient f et g deux fonction dérivables sur I et k un réel.

1. $f+g$ est dérivable sur I et pour tout $x\in I$:
$$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$$
2. $k\times f$ est dérivable sur I et pour tout $x\in I$:
$$(kf)'(x)=kf'(x)$$

Exemple 2.4. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f_1(x)=4$.
$f_1'(x)=0$.
2. $f_2(x)=-2x$.
$f_2'(x)=-2\times 1=-2$.
3. $f_3(x)=-7x+3$.
$f_3'(x)=-7\times 1+0=-7$.
4. $f_4(x)=3x^2$.
$f_4'(x)=3\times 2x=6x$.
5. $f_5(x)=4x^2-5x+1$.
$f_5'(x)=4\times 2x-5\times 1+0=8x-5$.
6. $f_6(x)=-x^3+x+1$.
$f_6'(x)=-3x^2+1+0=-3x^2+1$.
7. $f_7(x)=\frac{4}{x}$.
$f_7'(x)=4\times -\frac{1}{x^2}=-\frac{4}{x^2}$.
8. $f_8(x)=x^7+x^6+x^5$.
$f_8'(x)=7x^6+6x^5+5x^4$.
9. $f_9(x)=3\sqrt{x}$.
$f_9'(x)=3\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{3}{2\sqrt{x}}$.
10. $f_{10}(x)=-\sqrt{x}$.
$f_{10}'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

II.3 Dérivée d'un produit/quotient de fonctions

a) Dérivée d'un produit de fonctions

Propriété 2.4

Soient u et v deux fonctions dérivables sur I.
Alors uv est dérivable sur I et pour tout $x\in I$:
$$(uv)'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

Exemple 2.5. Soit $f:x\mapsto(5x+1)(x^2-4)$.

1. Sur quel ensemble f est-elle dérivable ?
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonction dérivables sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f'(x)$.
$f=uv$, avec $\begin{cases}u(x)=5x+1\\ v(x)=x^2-4\end{cases}$
On a : $\begin{cases}u'(x)=5\\ v'(x)=2x\end{cases}$
Ainsi :
$$\begin{aligned}f'(x)&=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\\&=5\left(x^2-4\right)+(5x+1)2x\\&=5x^2-20+10x^2+2x\\&=15x^2+2x-20\end{aligned}$$

b) Dérivée d'un quotient de fonctions

Propriété 2.5

Soient u et v deux fonctions dérivables sur I.
Si **v ne s'annule pas sur I**, alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$$

L'ensemble de dérivabilité de la fonction $\frac{u}{v}$ ne peut pas contenir de valeurs en lesquelles $v(x)$ s'annule puisque $\frac{u}{v}$ n'est même pas définie là où $v(x) = 0$.

Remarque 2.6. Cas particulier : $\left(\frac{1}{v}\right)'(x) = -\frac{v'(x)}{v(x)^2}$

Exemple 2.6. Soit $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{3x}$.

1. Quel est l'ensemble de dérivabilité de f ?
   $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, avec $\begin{cases} u(x) = x+1 \\ v(x) = 3x \end{cases}$
   u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
   Cependant $v(x) = 0$ pour $x = 0$.
   Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
2. Calculer $f'(x)$.
   On a : $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = 3 \end{cases}$
   Ainsi :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{3x - (x+1)3}{(3x)^2} \\ &= \frac{3x - (3x+3)}{9x^2} \\ &= -\frac{1}{3x^2} \end{aligned}$$

II.4 Dérivée d'une fonction de la forme $g(ax+b)$

Propriété 2.6

Soit $f : x \mapsto g(ax+b)$ avec g une fonction dérivable sur un intervalle I.
Soit J un intervalle tel que pour tout $x \in J$, $\boldsymbol{ax+b \in I}$.
f dérivable sur J, et pour tout $x \in J$:

$$f'(x) = ag'(ax+b)$$

Exemple 2.7. Soit $f : x \mapsto \sqrt{2x-4}$.

1. Quel est l'ensemble de dérivabilité de f ?
   $f(x) = g(2x-4)$ avec $g : x \mapsto \sqrt{x}$.
   Or g est dérivable sur $]0;+\infty[$.

$$\begin{aligned} 2x-4 \in \,]0;+\infty[&\Leftrightarrow 2x-4 > O \\ &\Leftrightarrow 2x > 4 \\ &\Leftrightarrow x > 2 \end{aligned}$$

   On en déduit que f est dérivable sur $]2;+\infty[$.
2. Calculer $f'(x)$.
   $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
   Ainsi :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \times g'(2x-4) \\ &= 2 \times \frac{1}{2\sqrt{2x-4}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2x-4}} \end{aligned}$$

Exercices : B