A Nombre dérivé et tangente

A.1 Faire ses gammes

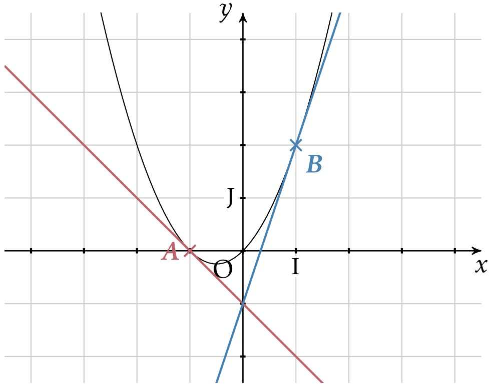
1 Nombre dérivé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 5$.

1. Exprimer en fonction de h le taux de variation de f entre 6 et $6 + h$.
2. Justifier que f est dérivable en 6 et donner la valeur de $f'(6)$.

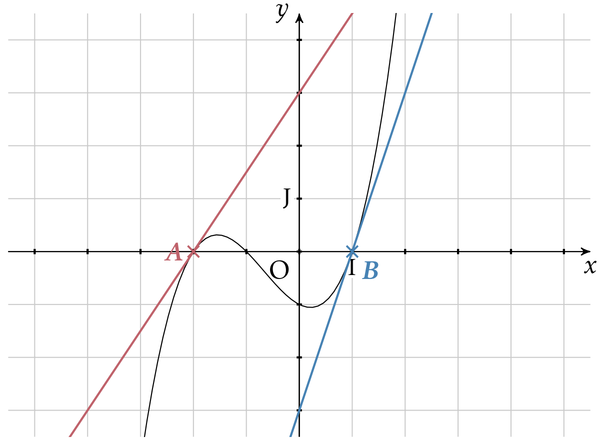
2 Nombre dérivé et tangente

On a représenté ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f.
Les deux droites tracées sont les tangentes à $\mathscr{C}_f$ aux points A et B d'abscisses respectives -1 et 1.
Par lecture graphique, déterminer $f'(-1)$ et $f'(1)$.



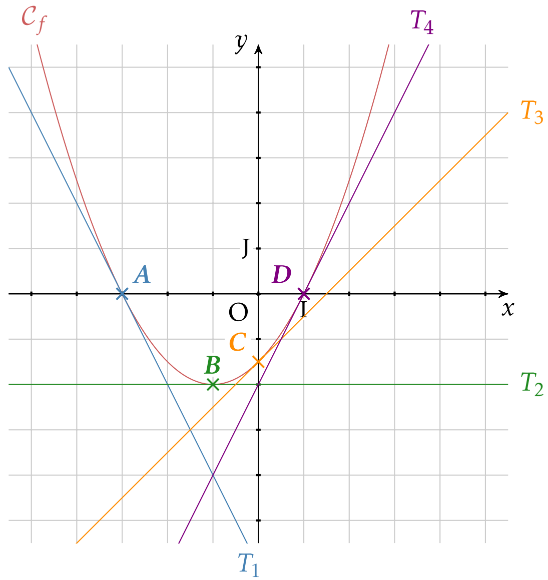
3

On a représenté ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f.
Les deux droites tracées sont les tangentes à $\mathscr{C}_f$ aux points A et B d'abscisses respectives -2 et 1.
Par lecture graphique, déterminer $f'(-2)$ et $f'(1)$.



4 Équation réduite d'une droite

On a tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que ses tangentes T_1, T_2, T_3 et T_4 respectivement aux points A, B, C et D.



En s'aidant du graphique, déterminer l'équation réduite de chacune des tangentes à $\mathscr{C}_f$.

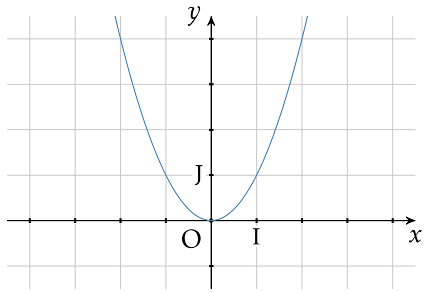
5 Équation d'une tangente

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 4$. Sachant que $f'(-4) = -24$ et $f'(3) = 18$, déterminer les équations de d_1 et d_2, tangentes à $\mathscr{C}_f$ respectivement aux points d'abscisses -4 et 3.

A.2 Exercices d'entraînement

6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. Calculer $f'(-1)$.
2. On a représenté $\mathscr{C}_f$ ci-dessous.
   Tracer la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1.



7 Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et T la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $A\left(-1;\frac{1}{2}\right)$.
Sachant que T passe par le point $B(2;-1)$, calculer $f'(-1)$.

8 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

1. Démontrer que pour tous réels a et b : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
2. Démontrer que f est dérivable en 2 et calculer $f'(2)$.

9 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, vérifiant :

- $f(0) = 0$
- $f'(1) = 0$
- $f(2) = \frac{1}{3}$
- $f'(0) = -1$
- $f(-4) = -\frac{8}{3}$
- $f'(-2) = 0$

Dans un repère, tracer une courbe susceptible de représenter f.

A.3 Exercices d'approfondissement

10 **DÉMO : Équation d'une tangente à une courbe**
Démontrer que l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

.

11 Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

12 Soit $f : x \mapsto |x|$.

1. Exprimer $f(x)$ sans valeur absolue.
2. Le taux d'accroissement d'une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, en un réel a peut aussi se définir par :

$$\begin{aligned} \tau_a : \mathbb{R}\setminus\{a\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \tau_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{aligned}$$

   On a alors $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \tau_a(x)$, si cette limite existe.
   Déterminer $\tau_0(x)$.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^-} \tau_0(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \tau_0(x)$.
4. Que peut-on en déduire ?

B Fonction dérivée

B.1 Faire ses gammes

13 Dans chacun des cas, déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de la fonction puis calculer sa dérivée.

1. $f_1(x) = 4x + 2$.
2. $f_2(x) = -5x^2 + 12x$.
3. $f_3(x) = -x^3 + 5x^2 - 8x + 1$.
4. $f_4(x) = -\frac{12}{x}$.
5. $f_5(x) = \frac{5}{x^3}$.
6. $f_6(x) = -6\sqrt{x}$.
7. $f_7(x) = \frac{\sqrt{x}}{5}$.

14 **Dérivée d'un produit de fonctions**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-4x+1)(2x+3)$.

1. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f puis calculer $f'(x)$ à l'aide la formule de dérivation d'un produit de fonctions.
2. Développer et réduire $f(x)$ puis calculer la dérivée de l'expression obtenue et vérifier que l'on obtient bien le même résultat que dans la question précédente.

15 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2-1\right)\left(x^3+x\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f puis calculer $f'(x)$.
2. Développer et réduire $f(x)$ puis calculer la dérivée de l'expression obtenue.

16 **Dérivée d'un quotient de fonctions**
Soit $f : x \mapsto \dfrac{3}{2x-3}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de f.
2. Calculer $f'(x)$.

17 Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2-3x+1}{x^2-4}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de f.
2. Calculer $f'(x)$.

18 Soit $f : x \mapsto \dfrac{5x-1}{x+2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de f.
2. Calculer $f'(x)$.

19 Soit $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{2x^2+x-6}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de f.
2. Calculer $f'(x)$.

20 **Dérivée d'une fonction de la forme $g(ax+b)$**

Soit f la fonction définie par $f(x) = (5x+3)^2$.
Identifier la forme $g(ax+b)$, préciser l'ensemble de dérivabilité de f, puis calculer $f'(x)$.

21 Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{3x-4}$.
Identifier la forme $g(ax+b)$, préciser l'ensemble de dérivabilité de f, puis calculer $f'(x)$.

B.2 Exercices d'entraînement

22 Soient f et g les fonctions définies par :

- $f(x) = \sqrt{x}(x+1)$
- $g(x) = \sqrt{x}\left(x^2-x+1\right)$

1. Déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité des fonctions f et g.
2. Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$.

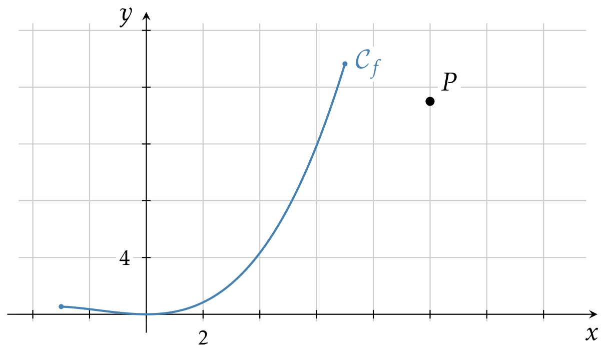
23 Soit f une fonction définie sur un ensemble I de $\mathbb{R}$.
Dans chaque cas, préciser l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de f, puis calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = \sqrt{2x+3} + \frac{1}{x}$.
2. $f(x) = \sqrt{x-2}\left(x^2-1\right)$.
3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-2x+1}}$.
4. $f(x) = \frac{\sqrt{-x+3}}{x}$.

24 Une particule évolue de façon rectiligne au cours du temps.
Sa position x en fonction du temps est donnée par l'équation $x(t) = 3t^2+9t+8$ où $x(t)$ exprimer la distance parcourue en mètres par la particule au temps t en secondes.
La vitesse de la particule en fonction du temps est donnée en mètre par seconde par la fonction dérivée de la fonction x.
On note $v(t) = \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$.

1. Quelle est la vitesse de la particule lorsque $t = 2$?
2. Quelle est la position de la particule lorsque $v(t) = 10$?

25 Le virage d'un circuit de formule 1 est modélisé dans un repère orthogonal par la fonction f définie sur l'intervalle $[-3;7]$ par $f(x) = \frac{3x^3}{100} + \frac{3x^2}{20}$.
Un conducteur ayant engagé le virage trop rapidement est sorti de la piste et a continué sur sa lancée en suivant une trajectoire rectiligne définie par la tangente à la courbe de f .



Sachant qu'il a atteint en fin de course le point P de coordonnées $(10;15)$, déterminer une valeur approchée à 10^{-2} des coordonnées du point où il a quitté la piste.
On pourra utiliser la calculatrice pour déterminer cette valeur approchée.

B.3 Exercices d'approfondissement

26 **Méthode de Newton**

L'objectif de cette méthode est de trouver une approximation du zéro d'une fonction.
Considérons f une fonction continue et dérivable sur un intervalle I et notons α une solution de l'équation $f(x) = 0$.

1. Considérons un réel $x_0 \in I$ « assez proche » de α.
   Déterminer l'équation de T_0, la tangente à $\mathscr{C}_f$ en x_0.
2. Déterminer l'abscisse x_1 du point d'intersection de T_0 avec l'axe des abscisses.

3. Le principe de la méthode est de répéter ce procédé. x_2 est l'abscisse du point d'intersection de T_1 avec l'axe des abscisses, et ainsi de suite…
   Ces itérations peuvent être effectuées par un ordinateur.
   Compléter le début de programme ci-dessous pour que la fonction `newton` renvoie une approximation de α après n itérations.
   On considère que deux fonctions `f` et `f_prime` ont déjà été créées pour permettre de calculer l'image d'un réel par f ou par f'.

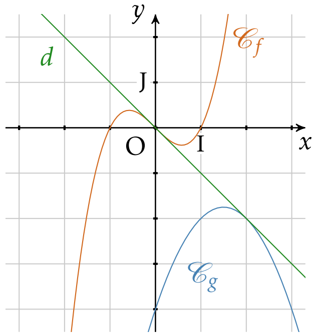
```
def newton(n, x0) :
  valeur = x0
  for i in range(...) :
    valeur = ...
  return ...
```

27 Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = x^3 - x$
- $g(x) = -x^2 + 3x - 4$

Soit d la tangente à $\mathscr{C}_f$ en O.

1. Déterminer l'équation réduite de la droite d.
2. Démontrer que d est aussi la tangente à $\mathscr{C}_g$ en un point A dont on déterminera les coordonnées.



28 DÉMO : dérivée de la fonction inverse

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^*$.
La fonction f n'étant pas définie en 0 nous allons analyser la fonction sur $]0;+\infty[$ d'abord, puis sur $]-\infty;0[$.
Soient a un réel strictement positif et h un réel non nul tel que $a+h>0$.

1. Déterminer $f(a+h) - f(a)$ en fonction de h.
2. En déduire l'expression du taux de variation $\tau(h)$ de f entre a et $a+h$.
3. Que peut-on dire de $\tau(h)$ lorsque h tend vers 0 ?
4. Justifier alors que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et exprimer $f'(a)$.
5. Démontrer que f est dérivable sur $]-\infty;0[$ et exprimer $f'(a)$ lorsque a est un réel strictement négatif.

29 DÉMO : dérivée d'un produit de fonctions

Soient u et v deux fonctions définines et dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et k un réel.
On considère la fonction f définie sur I par $f(x) = u(x)v(x)$.
À l'aide du taux de variation, démontrer que la fonction f est dérivable sur I et que :

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$