A Nombre dérivé et tangente

A.1 Faire ses gammes

1 Nombre dérivé

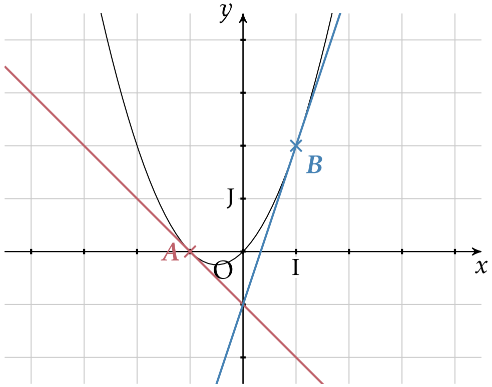
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 5$.

1. Exprimer en fonction de h le taux de variation de f entre 6 et $6+h$.
2. Justifier que f est dérivable en 6 et donner la valeur de $f'(6)$.

1. $f(6) = 77$.
   $f(6+h) = 2(h+6)^2 + 5 = 2h^2 + 24h + 77$.
$$\begin{aligned}\frac{f(6+h)-f(6)}{h} &= \frac{2h^2+24h+77-77}{h}\\ &= \frac{2h^2+24h}{h}\\ &= \frac{2h(h+12)}{h}\\ &= 2h+24\end{aligned}$$
2. $$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(6+h)-f(6)}{h} &= \lim_{h\to 0} 2h+24\\ &= 24\end{aligned}$$
   Donc f est dérivable en 6 et $f'(6) = 24$.

2 Nombre dérivé et tangente

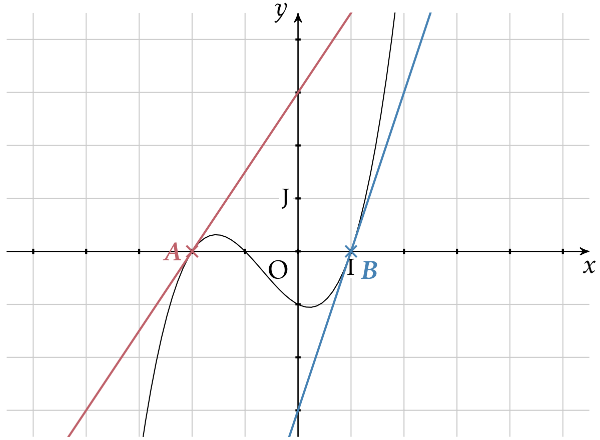
On a représenté ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f.
Les deux droites tracées sont les tangentes à $\mathscr{C}_f$ aux points A et B d'abscisses respectives -1 et 1.
Par lecture graphique, déterminer $f'(-1)$ et $f'(1)$.



$f'(-1)$ est égal au coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1, soit A.
Par lecture graphique, on trouve ainsi $f'(-1) = -1$.
$f'(1)$ est égal au coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1, soit B.
Par lecture graphique, on trouve ainsi $f'(1) = 3$.

3 On a représenté ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f.

Les deux droites tracées sont les tangentes à $\mathscr{C}_f$ aux points A et B d'abscisses respectives -2 et 1.
Par lecture graphique, déterminer $f'(-2)$ et $f'(1)$.

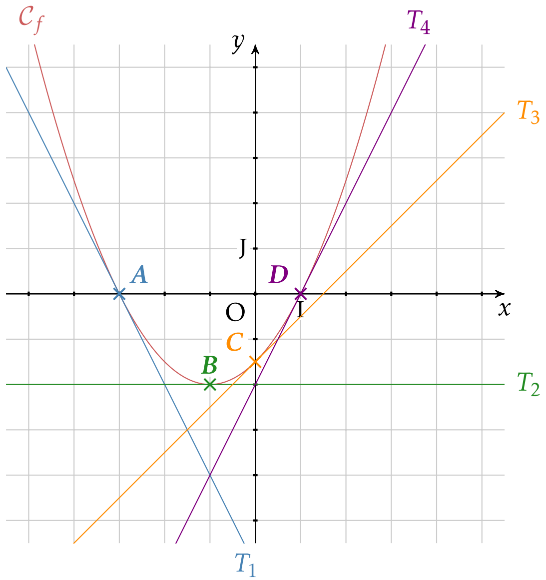


$f'(-2)$ est égal au coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -2, soit A.
Par lecture graphique, on trouve ainsi $f'(-2) = 1{,}5$.
$f'(1)$ est égal au coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1,

soit B.
Par lecture graphique, on trouve ainsi $f'(1) = 3$.

4 Équation réduite d'une droite

On a tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que ses tangentes T_1, T_2, T_3 et T_4 respectivement aux points A, B, C et D.



En s'aidant du graphique, déterminer l'équation réduite de chacune des tangentes à $\mathcal{C}_f$.

T_1 a pour équation $y = -2x - 6$.
T_2 a pour équation $y = -2$.
T_3 a pour équation $y = x - \frac{3}{2}$.
T_4 a pour équation $y = 2x - 2$.

5 Équation d'une tangente

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 4$. Sachant que $f'(-4) = -24$ et $f'(3) = 18$, déterminer les équations de d_1 et d_2, tangentes à $\mathcal{C}_f$ respectivement aux points d'abscisses -4 et 3.

On calcule $f(-4)$ et $f(3)$.
$f(-4) = 52$ et $f(3) = 31$.
L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Il suffit de remplacer $f'(a)$ et $f(a)$ par les valeurs données par l'énoncé et/ou calculées.
Après remplacement et développement, on trouve que d_1 a pour équation :

$$y = -24x - 44$$

Et d_2 a pour équation :

$$y = 18x - 23$$

A.2 Exercices d'entraînement

6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. Calculer $f'(-1)$.

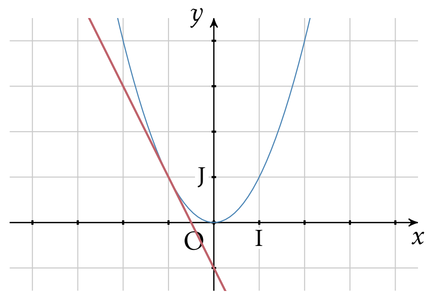
$$\begin{aligned} f(-1+h) &= (h-1)^2 \\ &= h^2 - 2h + 1 \end{aligned}$$

$$f(-1) = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} &= \frac{h^2 - 2h + 1 - 1}{h} \\ &= \frac{h^2 - 2h}{h} \\ &= \frac{h(h-2)}{h} \\ &= h - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} h - 2 \\ &= -2 \end{aligned}$$

2. On a représenté $\mathcal{C}_f$ ci-dessous.
Tracer la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1.



7 Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et T la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $A\left(-1;\frac{1}{2}\right)$.
Sachant que T passe par le point $B(2;-1)$, calculer $f'(-1)$.

$f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1, soit ici le coefficient directeur de la droite T passant par A et B. La droite passant par A et B a pour coefficient directeur $\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$.

$$\begin{aligned}\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} &= \frac{-1-\frac{1}{2}}{2-(-1)}\\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Donc $f'(-1) = -\frac{1}{2}$.

8 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

1. Démontrer que pour tous réels a et b : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
2. Démontrer que f est dérivable en 2 et calculer $f'(2)$.

1.

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b)\\ &= (a^2+2ab+b^2)(a+b)\\ &= a^3 + 2a^2b + b^2a + a^2b + 2ab^2 + b^3\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}f(2+h) &= (h+2)^3\\ &= h^3 + 6h^2 + 12h + 8\end{aligned}$$

$$f(2) = 8$$

$$\begin{aligned}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \frac{h^3+6h^2+12h+8-8}{h}\\ &= \frac{h^3+6h^2+12h}{h}\\ &= \frac{h\left(h^2+6h+12\right)}{h}\\ &= h^2+6h+12\end{aligned}$$

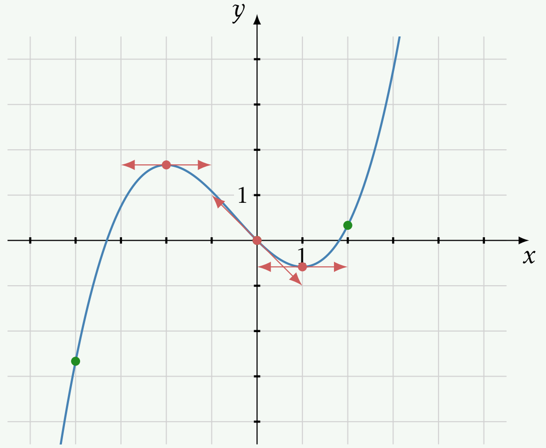
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \lim_{h\to 0} h^2+6h+12\\ &= 12\end{aligned}$$

Donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = 12$.

9 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, vérifiant :

- $f(0) = 0$
- $f(2) = \frac{1}{3}$
- $f(-4) = -\frac{8}{3}$
- $f'(-2) = 0$
- $f'(1) = 0$
- $f'(0) = -1$

Dans un repère, tracer une courbe susceptible de représenter f.



A.3 Exercices d'approfondissement

10 **DÉMO : Équation d'une tangente à une courbe**

Démontrer que l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

.

La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a a pour coefficient directeur $f'(a)$.
Une équation de cette tangente est donc de la forme $y = f'(a)x + p$, avec $p \in \mathbb{R}$.
De plus, A appartient à cette tangente, donc ses coordonnées en vérifient l'équation.
On a donc $f(a) = f'(a) \times a + p$, soit $p = f(a) - af'(a)$.
On obtient pour équation $y = f'(a)x + f(a) - af'(a)$ soit $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

11 Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

$$\begin{aligned}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h}\\ &= \frac{\sqrt{h}-0}{h}\\ &= \frac{\sqrt{h}}{h}\\ &= \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h}\times\sqrt{h}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{h}}\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{h}}=+\infty$ (lorsqu'on considère h de plus en plus proche de 0, $\frac{1}{\sqrt{h}}$ prend des valeurs sans cesse de plus en plus grandes).
Donc f n'est pas dérivable en 0 (la limite de son taux d'accroissement en 0 n'est pas un réel).

12 Soit $f : x \mapsto |x|$.

1. Exprimer $f(x)$ sans valeur absolue.
2. Le taux d'accroissement d'une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, en un réel a peut aussi se définir par :

$$\begin{aligned}\tau_a : \mathbb{R}\setminus\{a\} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto \tau_a(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\end{aligned}$$

On a alors $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\tau_a(x)$, si cette limite existe.
Déterminer $\tau_0(x)$.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^-}\tau_0(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\tau_0(x)$.
4. Que peut-on en déduire ?

B Fonction dérivée

B.1 Faire ses gammes

13 Dans chacun des cas, déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de la fonction puis calculer sa dérivée.

1. $f_1(x)=4x+2$.

   $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$ et f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   $f_1'(x)=4$

2. $f_2(x)=-5x^2+12x$.

   $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$ et f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   $f_2'(x)=-10x+12$

3. $f_3(x)=-x^3+5x^2-8x+1$.

   $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$ et f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   $f_3'(x)=-3x^2+10x-8$

4. $f_4(x)=-\frac{12}{x}$.

   $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}^*$ et f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   $f_4'(x)=\frac{12}{x^2}$

5. $f_5(x)=\frac{5}{x^3}$.

   $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}^*$ et f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   $f_5'(x)=-\frac{15}{x^4}$

6. $f_6(x)=-6\sqrt{x}$.

   $\mathcal{D}_f=[0,+\infty[$ et f est dérivable sur $]0,+\infty[$.
   $f_6'(x)=-\frac{3}{\sqrt{x}}$

7. $f_7(x)=\frac{\sqrt{x}}{5}$.

   $\mathcal{D}_f=[0,+\infty[$ et f est dérivable sur $]0,+\infty[$.
   $f_7'(x)=\frac{1}{10\sqrt{x}}$

14 Dérivée d'un produit de fonctions
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(-4x+1)(2x+3)$.

1. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f puis calculer $f'(x)$ à l'aide la formule de dérivation d'un produit de fonctions.
2. Développer et réduire $f(x)$ puis calculer la dérivée de l'expression obtenue et vérifier que l'on obtient bien le même résultat que dans la question précédente.

1. $f(x)=u(x)v(x)$ avec $\begin{cases}u(x)=2x+3\\ v(x)=-4x+1\end{cases}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

On a : $\begin{cases} u'(x) = 2 \\ v'(x) = -4 \end{cases}$

Ainsi :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= 2(-4x+1) + (2x+3)(-4) \\ &= -8x + 2 - 8x - 12 \\ &= -16x - 10 \end{aligned}$$

2. $f(x) = -8x^2 - 10x + 3$.
Avec les formules des dérivées usuelles, on en déduit : $f'(x) = -16x - 10$.

15 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2 - 1\right)\left(x^3 + x\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f puis calculer $f'(x)$.
2. Développer et réduire $f(x)$ puis calculer la dérivée de l'expression obtenue.

1. $f(x) = u(x)v(x)$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2 - 1 \\ v(x) = x^3 + x \end{cases}$
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
On a : $\begin{cases} u'(x) = 2x \\ v'(x) = 3x^2 + 1 \end{cases}$
Ainsi :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= 2x\left(x^3 + x\right) + \left(x^2 - 1\right)\left(3x^2 + 1\right) \\ &= 2x^4 + 2x^2 + 3x^4 - 2x^2 - 1 \\ &= 5x^4 - 1 \end{aligned}$$

2. $f(x) = x^5 - x$.
Avec les formules des dérivées usuelles, on en déduit : $f'(x) = 5x^4 - 1$.

16 Dérivée d'un quotient de fonctions

Soit $f : x \mapsto \dfrac{3}{2x-3}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de f.
2. Calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, avec $\begin{cases} u(x) = 3 \\ v(x) = 2x - 3 \end{cases}$
u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
Cependant $v(x) = 0$ pour $x = \frac{3}{2}$.
Donc f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$.
2. On a : $\begin{cases} u'(x) = 0 \\ v'(x) = 2 \end{cases}$
Ainsi :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{0 \times (2x-3) - 3 \times 2}{(2x-3)^2} \\ &= \frac{0-6}{(2x-3)^2} \\ &= -\frac{6}{(2x-3)^2} \end{aligned}$$

17 Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - 4}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de f.
2. Calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, avec $\begin{cases} u(x) = x^2 - 3x + 1 \\ v(x) = x^2 - 4 \end{cases}$
u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
On cherche les valeurs en lesquelles $v(x)$ s'annule.
On trouve que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.
2. On a : $\begin{cases} u'(x) = 2x - 3 \\ v'(x) = 2x \end{cases}$
Ainsi :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{(2x-3) \times \left(x^2 - 4\right) - \left(x^2 - 3x + 1\right) \times 2x}{\left(x^2 - 4\right)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{2x^3-3x^2-8x+12-\left(2x^3-6x^2+2x\right)}{\left(x^2-4\right)^2} = \frac{3x^2-10x+12}{\left(x^2-4\right)^2}$$

18 Soit $f : x \mapsto \dfrac{5x-1}{x+2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de f.
2. Calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, avec $\begin{cases} u(x) = 5x-1 \\ v(x) = x+2 \end{cases}$
   u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
   Cependant $v(x) = 0$ pour $x = -2$.
   Donc f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
2. On a : $\begin{cases} u'(x) = 5 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$
   Ainsi :

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \frac{5\times(x+2)-(5x-1)\times 1}{(x+2)^2} = \frac{5x+10-(5x-1)}{(x+2)^2} = \frac{11}{(x+2)^2}$$

19 Soit $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{2x^2+x-6}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de f.
2. Calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, avec $\begin{cases} u(x) = x-1 \\ v(x) = 2x^2+x-6 \end{cases}$
   u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
   Cependant $v(x) = 0$ pour $x_1 = -2$ et $x_2 = \frac{3}{2}$ $(\Delta = 49)$.
   Donc f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-2; \frac{3}{2}\right\}$.
2. On a : $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = 4x+1 \end{cases}$
   Ainsi :

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \frac{1\times\left(2x^2+x-6\right)-(x-1)\times(4x+1)}{\left(2x^2+x-6\right)^2} = \frac{2x^2+x-6-\left(4x^2-3x-1\right)}{\left(2x^2+x-6\right)^2} = \frac{-2x^2+4x-5}{\left(2x^2+x-6\right)^2}$$

20 Dérivée d'une fonction de la forme $g(ax+b)$

Soit f la fonction définie par $f(x) = (5x+3)^2$.
Identifier la forme $g(ax+b)$, préciser l'ensemble de dérivabilité de f, puis calculer $f'(x)$.

$f(x) = g(ax+b)$ avec $g(x) = x^2$ et $ax+b = 5x+3$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = ag'(ax+b) = 5\times 2(5x+3) = 50x+30$$

21 Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{3x-4}$.
Identifier la forme $g(ax+b)$, préciser l'ensemble de dérivabilité de f, puis calculer $f'(x)$.

$f(x) = g(ax+b)$ avec $g(x) = \sqrt{x}$ et $ax+b = 3x-4$.
g est dérivable sur $]0, +\infty[$.
Or $3x-4 \in]0,+\infty[$ si et seulement si $x \in \left]\frac{4}{3}, +\infty\right[$.
Donc f est dérivable sur $\left]\frac{4}{3}, +\infty\right[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= ag'(ax+b) \\ &= 3 \times \frac{1}{2\sqrt{3x-4}} \\ &= \frac{3}{2\sqrt{3x-4}} \end{aligned}$$

B.2 Exercices d'entraînement

22 Soient f et g les fonctions définies par :

- $f(x) = \sqrt{x}(x+1)$
- $g(x) = \sqrt{x}\left(x^2 - x + 1\right)$

1. Déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité des fonctions f et g.

- $f(x) = u(x)v(x)$ avec $\begin{cases} u(x) = \sqrt{x} \\ v(x) = x+1 \end{cases}$.
  u est définie sur $[0,+\infty[$ et v est définie sur $\mathbb{R}$, donc f est définie sur $[0,+\infty[$ comme produit de fonctions définies sur $[0,+\infty[$.
  u est dérivable sur $]0,+\infty[$ et v est dérivable sur $\mathbb{R}$.
  Donc f est dérivable sur $]0,+\infty[$, comme produit de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$.
- $g(x) = u(x)v(x)$ avec $\begin{cases} u(x) = \sqrt{x} \\ v(x) = x^2 - x + 1 \end{cases}$.
  u est définie sur $[0,+\infty[$ et v est définie sur $\mathbb{R}$, donc g est définie sur $[0,+\infty[$ comme produit de fonctions définies sur $[0,+\infty[$.
  u est dérivable sur $]0,+\infty[$ et v est dérivable sur $\mathbb{R}$.
  Donc g est dérivable sur $]0,+\infty[$, comme produit de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$.

2. Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$.

- $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ v'(x) = 1 \end{cases}$.
  Ainsi :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) + \sqrt{x} \times 1 \\ &= \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \\ &= \frac{3\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

- $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ v'(x) = 2x - 1 \end{cases}$.
  Ainsi :

$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(x^2 - x + 1\right) + \sqrt{x} \times (2x-1) \\ &= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2} - \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x^{\frac{3}{2}} - \sqrt{x} \\ &= \frac{5x^{\frac{3}{2}}}{2} - \frac{3\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

23 Soit f une fonction définie sur un ensemble I de $\mathbb{R}$.
Dans chaque cas, préciser l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de f, puis calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = \sqrt{2x+3} + \frac{1}{x}$.

$\mathcal{D}_f = \left[-\frac{3}{2}, 0\right[\cup]0,+\infty[$.

$f(x) = g(ax+b) + h(x)$ avec $\begin{cases} g(x) = \sqrt{x} \\ ax+b = 2x+3 \\ h(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
g est dérivable sur $]0,+\infty[$.
Or $2x+3 \in]0,+\infty[$ si $x \in \left]-\frac{3}{2},+\infty\right[$.
Donc la fonction $x :\mapsto \sqrt{2x+3}$ est dérivable sur $\left]-\frac{3}{2},+\infty\right[$.
Ainsi, f est dérivable sur $\left]-\frac{3}{2}, 0\right[\cup]0,+\infty[$.

On a $\begin{cases} g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ h'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \end{cases}$

Donc la fonction $x \mapsto \sqrt{2x+3}$ a pour dérivée $\frac{1}{\sqrt{2x+3}}$.
Finalement : $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}} - \frac{1}{x^2}$.

2. $f(x) = \sqrt{x-2}\left(x^2-1\right)$.

$\mathcal{D}_f = [2;+\infty[$.
f est dérivable sur $]2,+\infty[$.
$f'(x) = 2x\sqrt{x-2} + \frac{x^2-1}{2\sqrt{x-2}} = \frac{5x^2-8x-1}{2\sqrt{x-2}}$.

3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-2x+1}}$.

$\mathcal{D}_f = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ f est dérivable sur $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$.
$f'(x) = \frac{1}{(-2x+1)^{\frac{3}{2}}}$.

4. $f(x) = \frac{\sqrt{-x+3}}{x}$.

$\mathcal{D}_f =]-\infty;0[\cup]0;3]$. f est dérivable sur $]-\infty,0[\cup]0,3[$.
$f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{-x+3}} - \frac{\sqrt{-x+3}}{x^2} = \frac{x-6}{2x^2\sqrt{-x+3}}$.

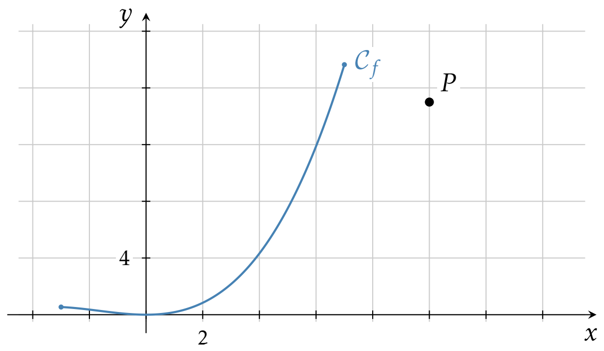
24 Une particule évolue de façon rectiligne au cours du temps.
Sa position x en fonction du temps est donnée par l'équation $x(t) = 3t^2 + 9t + 8$ où $x(t)$ exprimer la distance parcourue en mètres par la particule au temps t en secondes.
La vitesse de la particule en fonction du temps est donnée en mètre par seconde par la fonction dérivée de la fonction x.
On note $v(t) = \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$.

1. Quelle est la vitesse de la particule lorsque $t = 2$?
2. Quelle est la position de la particule lorsque $v(t) = 10$?

1. $v(t) = x'(t) = 6t + 9$.
   On en déduit $v(2) = 21$.
   Lorsque 2 secondes sont écoulées, la particule a une vitesse de 21.
2.
$$\begin{aligned} v(t) = 10 &\Leftrightarrow 6t + 9 = 10 \\ &\Leftrightarrow t = \frac{1}{6} \end{aligned}$$
   Or $x(\frac{1}{6}) = \frac{115}{12}$.
   Donc la particule a parcouru $\frac{115}{12} \approx 9{,}58$m lorsqu'elle atteint une vitesse de 10m.s^{-1}.

25 Le virage d'un circuit de formule 1 est modélisé dans un repère orthogonal par la fonction f définie sur l'intervalle $[-3;7]$ par $f(x) = \frac{3x^3}{100} + \frac{3x^2}{20}$.

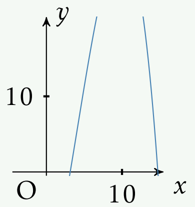
Un conducteur ayant engagé le virage trop rapidement est sorti de la piste et a continué sur sa lancée en suivant une trajectoire rectiligne définie par la tangente à la courbe de f .



Sachant qu'il a atteint en fin de course le point P de coordonnées $(10;15)$, déterminer une valeur approchée à 10^{-2} des coordonnées du point où il a quitté la piste.
On pourra utiliser la calculatrice pour déterminer cette valeur approchée.

Il faut chercher la tangente à $\mathscr{C}_f$ à laquelle le point P appartient.
L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en un point d'abscisse quelconque a est :
$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$
$f'(x) = \frac{9x^2}{100} + \frac{3x}{10}$.
$$y = f'(a)(x-a) + f(a) \Leftrightarrow y = \left(\frac{9a^2}{100} + \frac{3a}{10}\right)x - \frac{3a^3}{50} - \frac{3a^2}{20}$$
Un point appartient à une droite si et seulement ses coordonnées vérifient l'équation de cette droite.
Ainsi, on cherche a tel que :
$$15 = \left(\frac{9a^2}{100} + \frac{3a}{10}\right) \times 10 - \frac{3a^3}{50} - \frac{3a^2}{20}$$
Or :
$$15 = \left(\frac{9a^2}{100} + \frac{3a}{10}\right) \times 10 - \frac{3a^3}{50} - \frac{3a^2}{20} \Leftrightarrow -\frac{3a^3}{50} + \frac{3a^2}{4} + 3a - 15 = 0$$
On doit donc chercher les valeurs qui annulent la fonction $x \mapsto -\frac{3x^3}{50} + \frac{3x^2}{4} + 3x - 15$.
Pour cela, on peut tracer à l'aide de la calculatrice sa courbe représentative et son tableau de valeurs.
On voit que la fonction s'annule en 3 valeurs, mais seule une valeur comprise

entre −3 et 6 nous intéresserait dans le contexte donné.
La fonction semble s'annuler autour de 3 (environ 3,1), donc on dresse le tableau de valeurs de la fonction avec un pas de 10^{-2} au voisinage de ces valeurs.



x	image
3,1	−0,28
3,11	−0,221
3,12	−0,161
3,13	−0,102
3,14	−0,043
3,15	0,017
3,16	0,076
3,17	0,135
3,18	0,195
3,19	0,254

On trouve que la fonction s'annule pour $x \approx 3,15$.
$f(3,15) \approx 2,43$.
Donc le pilote a quitté la piste au point de coordonnées $(3,5;2,43)$, à 10^{-2} près.

B.3 Exercices d'approfondissement

26 Méthode de Newton

L'objectif de cette méthode est de trouver une approximation du zéro d'une fonction.
Considérons f une fonction continue et dérivable sur un intervalle I et notons α une solution de l'équation $f(x) = 0$.

1. Considérons un réel $x_0 \in I$ « assez proche » de α.
   Déterminer l'équation de T_0, la tangente à $\mathscr{C}_f$ en x_0.
2. Déterminer l'abscisse x_1 du point d'intersection de T_0 avec l'axe des abscisses.
3. Le principe de la méthode est de répéter ce procédé. x_2 est l'abscisse du point d'intersection de T_1 avec l'axe des abscisses, et ainsi de suite…
   Ces itérations peuvent être effectuées par un ordinateur.
   Compléter le début de programme ci-dessous pour que la fonction `newton` renvoie une approximation de α après n itérations.
   On considère que deux fonctions `f` et `f_prime` ont déjà été créées pour permettre de calculer l'image d'un réel par f ou par f'.

```
def newton(n, x0) :
    valeur = x0
    for i in range(...) :
        valeur = ...
    return ...
```

1. $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
2. $0 = f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0) \Leftrightarrow x_1 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} + x_0$.

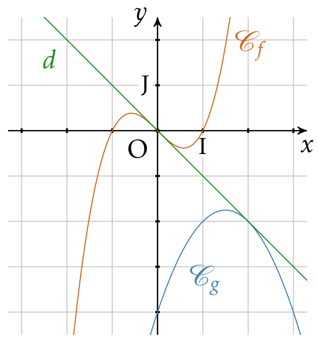
27

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = x^3 - x$
- $g(x) = -x^2 + 3x - 4$

Soit d la tangente à $\mathscr{C}_f$ en O.

1. Déterminer l'équation réduite de la droite d.
2. Démontrer que d est aussi la tangente à $\mathscr{C}_g$ en un point A dont on déterminera les coordonnées.



$f'(x) = 3x^2 - 1$.
$f(0) = 0$ et $f'(0) = -1$.

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) \Leftrightarrow y = -x \qquad (2.1)$$

Pour trouver l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$ en un point d'abscisse a quelconque, on a besoin de connaître l'expression de la dérivée de g.
On a : $g'(x) = -2x + 3$.
On va appliquer la formule de l'équation de la tangente "$y = g'(a)(x - a) + g(a)$".
On a : $g'(a) = -2a + 3$ et $g(a) = -a^2 + 3a - 4$.
Ainsi :

$$\begin{aligned} y = g'(a)(x-a) + g(a) &\Leftrightarrow y = (-2a+3)(x-a) + \left(-a^2 + 3a - 4\right) \\ &\Leftrightarrow y = (-2a+3)x - a \times (-2a+3) - a^2 + 3a - 4 \\ &\Leftrightarrow y = (-2a+3)x + 2a^2 - 3a - a^2 + 3a - 4 \\ &\Leftrightarrow y = (-2a+3)x + a^2 - 4 \qquad (2.2) \end{aligned}$$

On cherche alors a tel que les expressions obtenues pour y dans les deux équations (2.1) et (2.2) soient égales, c'est à dire a tel que :

$$-x = (-2a+3)x + a^2 - 4$$

Autrement dit, coefficients directeurs et ordonnées à l'origine doivent être égaux pour que les deux droites soient confondues.
On cherche ainsi a tel que $-1 = -2a+3$ et $a^2-4=0$.

$$-1 = -2a+3 \Leftrightarrow a = 2$$

Pour que les coeffient directeurs soient égaux, on doit donc avoir $a=2$.
Pour $a=2$, on vérifie facilement qu'on a également $a^2-4=0$.
Donc d et la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point A d'abscisse $x_A = 2$ sont confondues.
Ce point appartenant à $\mathscr{C}_g$, on en déduit $y_A = g(x_A) = g(2) = -2$. □

Autres méthodes :

- Méthode de Newton
- On peut chercher a tel que $g'(a) = -1$.
  On trouve alors une valeur en abscisse (ici 2), telle que la tangente à $\mathscr{C}_g$ a le même coefficient directeur que d.
  Encore une fois, cela ne suffit pas, il faut vérifier que ces droites sont confondues, et pas seulement parallèles.
  Il suffit alors de montrer que cette tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 2 a un point en commun avec d.
  On peut calculer les coordonnées du point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse 2 (son ordonnée est égale à $g(2)$), puis montrer que les coordonnées trouvées vérifient l'équation de la droite d. □

28 DÉMO : dérivée de la fonction inverse

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^*$.
La fonction f n'étant pas définie en 0 nous allons analyser la fonction sur $]0;+\infty[$ d'abord, puis sur $]-\infty;0[$.
Soient a un réel strictement positif et h un réel non nul tel que $a+h>0$.

1. Déterminer $f(a+h)-f(a)$ en fonction de h.
2. En déduire l'expression du taux de variation $\tau(h)$ de f entre a et $a+h$.
3. Que peut-on dire de $\tau(h)$ lorsque h tend vers 0 ?
4. Justifier alors que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et exprimer $f'(a)$.
5. Démontrer que f est dérivable sur $]-\infty;0[$ et exprimer $f'(a)$ lorsque a est un réel strictement négatif.

29 DÉMO : dérivée d'un produit de fonctions

Soient u et v deux fonctions définines et dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et k un réel.
On considère la fonction f définie sur I par $f(x) = u(x)v(x)$.
À l'aide du taux de variation, démontrer que la fonction f est dérivable sur I et que :

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h} \\
&= \frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x+h)+u(x)v(x+h)-u(x)v(x)}{h} \\
&= \frac{[u(x+h)-u(x)]\times v(x+h)+u(x)[v(x+h)-v(x)]}{h} \\
&= \frac{u(x+h)-u(x)}{h}\times v(x+h)+u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\times v(x+h)+u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right)\times\lim_{h\to 0}\big(v(x+h)\big)+\dots \\
&\dots+\lim_{h\to 0}\big(u(x)\big)\times\lim_{h\to 0}\left(\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right) \\
&= u'(x)v(x)+u(x)v'(x)
\end{aligned}$$

□