2 Dérivation

I Nombre dérivé et tangente

I.1 Taux de variation

Définition 2.1 – Taux de variation

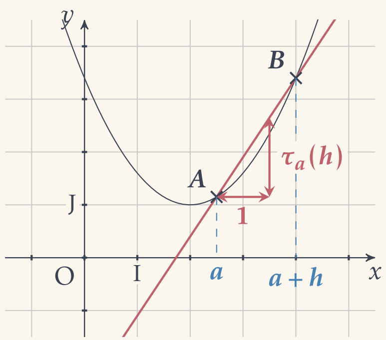
Soient f une fonction définie sur un intervalle I, a un réel de I et $h \in \mathbb{R}^*$.
Le ____________________ (ou ________________________) de f entre a et $a+h$, noté ....., est défini par :

$$\tau_a(h) = \ \dots\dots\dots$$

Rappel 2.1. Le ______________________ de la droite (AB) est égal à :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Remarque 2.1. Soient $A\big(a\ ;\ f(a)\big)$ et $B\big(a+h\ ;\ f(a+h)\big)$.
Le taux de variation de f entre a et $a+h$ correspond au coefficient directeur de la droite (AB).



I.2 Nombre dérivé

Définition 2.2 – Dérivabilité et nombre dérivé

Soient f définie sur un intervalle I, a un réel de I et h un réel non nul.
f est dite _______________ lorsque $\tau_a(h)$ se rapproche d'un nombre réel quand h se rapproche de 0.
Cette limite du taux de variation, lorsque h tend vers 0 est appelée __________ ________________ .
On le note ..... et on écrit :

$$f'(a) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Remarque 2.2. f' se lit « f prime ».
$\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ se lit « limite quand h tend vers 0 de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ».

Remarque 2.3. On note $\lim\limits_{h\to 0^-}$ la limite lorsque h se rapproche de 0 en étant négatif et $\lim\limits_{h\to 0^+}$ la limite lorsque h tend vers 0 en étant positif.
Dans certains cas, que nous verrons en exercice, on a $\lim\limits_{h\to 0^-} \tau_a(h) \neq \lim\limits_{h\to 0^+} \tau_a(h)$ et la fonction n'est alors pas dérivable en a.

Exemple 2.1. Soit la fonction $f : x \mapsto x^2 + 1$.

1. Exprimer en fonction de h le taux de variation de f entre 2 et $2+h$.

2. En déduire si la fonction carré est dérivable en 2, et si oui, donner la valeur de $f'(2)$.

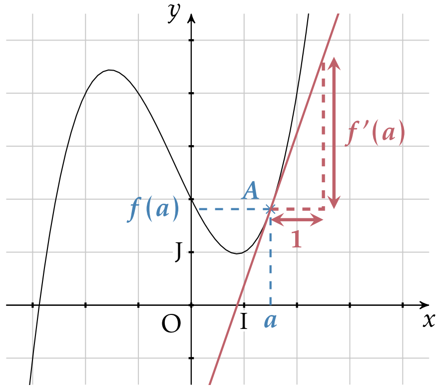
I.3 Tangente

Définition 2.3 – Tangente à une courbe en un point

Soit f définie sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
La __________ à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a est la droite passant par A, de coefficient directeur ......

Illustration

Sur le graphique ci-contre, on a tracé la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A.

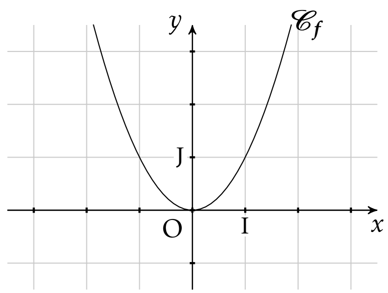


Exemple 2.2. Soit $f : x \mapsto x^2$.

1. Calculer $f'(-1)$.

2. Quel est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1 ?

3. Tracer cette tangente sur le graphique ci dessous.



Propriété 2.1 – Équation de la tangente

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en un réel a de I.
L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est :

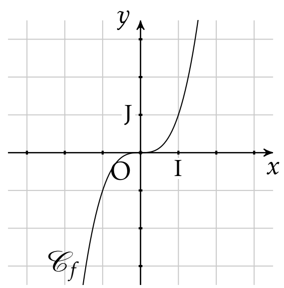
. . . .

Rappel 2.2. L'équation réduite d'une droite $\mathcal{D}$ du plan est de la forme . . . . , où m est le ______________________ de $\mathcal{D}$ et p son ____________ ___________ .

Démonstration

Voir exercices □

Exemple 2.3. Soit $f : x \mapsto x^3$.



1. Déterminer graphiquement $f(1)$.

2. Sachant que $f'(1) = 3$, déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 1.

3. Tracer cette tangente.

Exercices : A

II Fonction dérivée

Définition 2.4

Soit f définie et dérivable sur un intervalle I.
La fonction dérivée de f, notée f', est la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$.

Remarque 2.4. C'est la fonction qui à toute valeur x associe le nombre dérivé $f'(x)$, i.e le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x.

II.1 Dérivées usuelles

Propriété 2.2

Le tableau suivant donne les dérivées des fonctions usuelles :

Fonction f	Ensemble de définition	Dérivée f'	f est dérivable sur
$f(x)=k,\ k\in\mathbb{R}$	...	$f'(x)=\dots$	...
$f(x)=x$	...	$f'(x)=\dots$	...
$f(x)=x^2$	...	$f'(x)=\dots$	...
$f(x)=x^n$	...	$f'(x)=\dots\dots$	...
$f(x)=\frac{1}{x}$	...	$f'(x)=\dots.$	...
$f(x)=\frac{1}{x^n}$	...	$f'(x)=\dots..$	...
$f(x)=\sqrt{x}$	...	$f'(x)=\dots.$	...

Remarque 2.5. On peut retrouver la formule $\left(\frac{1}{x^n}\right)'=-\frac{n}{x^{n+1}}$ à partir de $(x^n)'=nx^{n-1}$.
En effet : $\frac{1}{x^n}=x^{-n}$.
$\left(\frac{1}{x^n}\right)'=(x^{-n})'=-nx^{-n-1}=-nx^{-(n+1)}=-\frac{n}{x^{n+1}}$.

II.2 Opérations de base sur les dérivées

Propriété 2.3 – Opérations

Soient f et g deux fonction dérivables sur I et k un réel.

1. $f+g$ est dérivable sur I et pour tout $x\in I$:

$$(f+g)'(x)=\dots\dots\dots\dots$$

2. $k\times f$ est dérivable sur I et pour tout $x\in I$:

$$(kf)'(x)=\dots\dots$$

Exemple 2.4. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f_1(x)=4$.
2. $f_2(x)=-2x$.
3. $f_3(x)=-7x+3$.
4. $f_4(x)=3x^2$.
5. $f_5(x)=4x^2-5x+1$.
6. $f_6(x)=-x^3+x+1$.
7. $f_7(x)=\frac{4}{x}$.
8. $f_8(x)=x^7+x^6+x^5$.
9. $f_9(x)=3\sqrt{x}$.
10. $f_{10}(x)=-\sqrt{x}$.

II.3 Dérivée d'un produit/quotient de fonctions

a) Dérivée d'un produit de fonctions

Propriété 2.4

Soient u et v deux fonctions dérivables sur I.
Alors uv est dérivable sur I et pour tout $x\in I$:

$$(uv)'(x)=\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Exemple 2.5. Soit $f:x\mapsto(5x+1)(x^2-4)$.

1. Sur quel ensemble f est-elle dérivable ?
2. Calculer $f'(x)$.

b) Dérivée d'un quotient de fonctions

Propriété 2.5

Soient u et v deux fonctions dérivables sur I.
Si ______________________ , alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

⚠ L'ensemble de dérivabilité de la fonction $\frac{u}{v}$ ne peut pas contenir de valeurs en lesquelles $v(x)$ s'annule puisque $\frac{u}{v}$ n'est même pas définie là où $v(x) = 0$.

Remarque 2.6. Cas particulier : $\left(\frac{1}{v}\right)'(x) = \dots\dots$

Exemple 2.6. Soit $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{3x}$.

1. Quel est l'ensemble de dérivabilité de f ?

2. Calculer $f'(x)$.

II.4 Dérivée d'une fonction de la forme $g(ax+b)$

Propriété 2.6

Soit $f : x \mapsto g(ax+b)$ avec g une fonction dérivable sur un intervalle I.
Soit J un intervalle tel que pour tout $x \in J$, ...
f dérivable sur J, et pour tout $x \in J$:

$$f'(x) = \dots\dots\dots\dots$$

Exemple 2.7. Soit $f : x \mapsto \sqrt{2x-4}$.

1. Quel est l'ensemble de dérivabilité de f ?

2. Calculer $f'(x)$.

Exercices : B