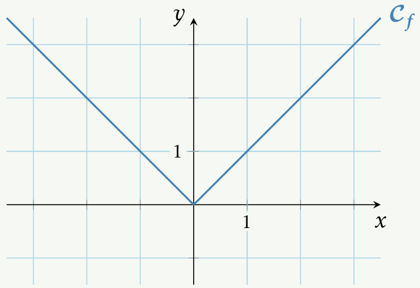
1 Fonctions de référence

I Fonction valeur absolue

Définition 1.1 – Valeur absolue

La fonction valeur absolue est la fonction :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \longmapsto |x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}.$$



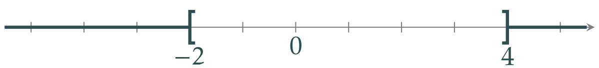
Rappel 1.1. $|a-b|$ donne la distance entre les réels a et b. Cas particulier : $|x|$ donne la distance entre x et 0.

Exemple 1.1.

1. Résoudre $|x-1| \geq 3$ puis représenter graphiquement les solutions sur la droite des réels.

$$|x-1| \geq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 3 & \text{si } x-1 \geq 0 \\ -(x-1) \geq 3 & \text{si } x-1 < 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 & \text{si } x \geq 1 \\ x \leq -2 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

$$S =]-\infty;-2] \cup [4;+\infty[$$



2. Soit $x \in]-3;4]$. En utilisant la courbe représentative de la fonction valeur absolue, déterminer un encadrement de $|x|$.
Pour $x \in]-3;4]$, les images appartiennent à l'intervalle $[0;4]$.

$$0 \leq |x| \leq 4$$

Exercices : A

II Fonctions polynômes du second degré

II.1 Définition

Définition 1.2

Une fonction polynôme du second degré est une fonction de la forme $f : x \mapsto \boldsymbol{ax^2+bx+c}$, avec a, b, $c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.
Sa courbe représentative est une **parabole**.

Remarque 1.1.

- $c = f(0)$. On peut donc déterminer la valeur de c graphiquement en regardant l'ordonnée à l'origine.
- Nous avons déjà étudié auparavant une fonction polynôme du second degré particulière : la fonction carré ($a = 1$, $b = 0$ et $c = 0$).

Exemple 1.2. Les fonctions suivantes sont-elles des fonctions polynômes du second degré ? Préciser les coefficients a, b et c associés.

1. $f : x \mapsto 2x^2 - 3x + 1$
Oui : $a = 2$; $b = -3$; $c = 1$
2. $f : x \mapsto x^2$
Oui : $a = 1$; $b = 0$; $c = 0$
3. $f : x \mapsto -x^2 + 4x$
Oui : $a = -1$; $b = 4$; $c = 0$
4. $f : x \mapsto -4x + 3$
Non, f est une fonction affine.
5. $f : x \mapsto (-x-2)(x+3)$
$(-x-2)(x+3) = -x^2 - 3x - 2x - 6 = -x^2 - 5x - 6$.
Donc oui f est une fonction polynôme du second degré et : $a = -1$; $b = -5$; $c = -6$

II.2 Extremum et sens de variation

Propriété 1.1

Toute fonction polynôme du second degré $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous forme **canonique** :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

où $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{\Delta}{4a} = f(\alpha)$

Démonstration

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\
&= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)\\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}\\
&= a(x-\alpha)^2+\beta
\end{aligned}$$

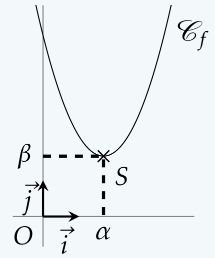
avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{\Delta}{4a}$.
$f(\alpha) = a(\alpha-\alpha)^2+\beta = \beta$. □

Propriété 1.2

Le point $S(\alpha\ ;\ \beta)$ est le sommet de $\mathscr{C}_f$.
β est appelé **extremum** de f (atteint en α).

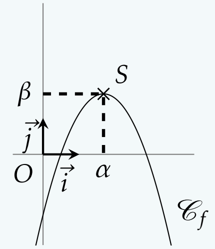
- Si $a > 0$, alors β est un **minimum**

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	↘	β	↗



- Si $a < 0$, alors β est un **maximum** :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	↗	β	↘



Démonstration

- Cas 1 : $a > 0$.
  Pour tout x de $\mathbb{R}$: $(x-\alpha)^2 \geq 0$.
  Or $a > 0$, donc : $\forall x \in R, a(x-\alpha)^2 \geq 0$
  Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, a(x-\alpha)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a(x-\alpha)^2+\beta \geq \beta \Leftrightarrow f(x) \geq \beta$. (On dit alors que β est un *minorant* de f)
  De plus : $f(\alpha) = a(\alpha-\alpha)^2+\beta = a\times 0+\beta = \beta$.
  Donc β est le *minimum* de f et il est atteint en $x = \alpha$.

- Cas 2 : $a < 0$.
  Pour tout x de $\mathbb{R}$: $(x-\alpha)^2 \geq 0$.
  Or $a < 0$, donc : $\forall x \in R, a(x-\alpha)^2 \leq 0$
  Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, a(x-\alpha)^2 \leq 0 \Leftrightarrow a(x-\alpha)^2+\beta \leq \beta \Leftrightarrow f(x) \leq \beta$. (On dit alors que β est un *majorant* de f)
  De plus : $f(\alpha) = a(\alpha-\alpha)^2+\beta = a\times 0+\beta = \beta$.
  Donc β est le *maximum* de f et il est atteint en $x = \alpha$.

□

Remarque 1.2. La parabole est tournée vers le haut lorsque $a > 0$ (penser au cas de la fonction carré), et vers le bas lorsque $a < 0$.

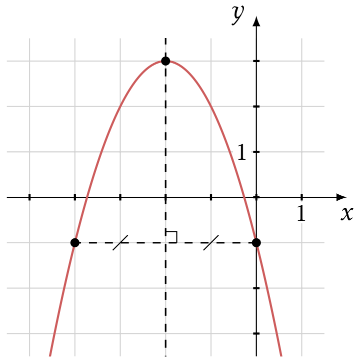
Remarque 1.3. Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$.

Exemple 1.3. Dresser le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto -x^2 - 4x - 1$, puis tracer une allure de sa courbe représentative dans le repère ci-dessous.

$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2\times(-1)} = -2.$
$\beta = f(-2) = -1\times(-2)^2 - 4\times(-2) - 1 = 3.$
$a < 0$, donc β est un maximum.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$

Le sommet de $\mathscr{C}_f$ a pour coordonnées $(-2\,;\,3)$.
Ordonnée à l'origine : $c = -1$.
On utilise la symétrie par rapport à la droite d'équation $x = -2$ pour compléter le tracé.



II.3 Zéros et signe

a) Zéros

Rappel 1.2. $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé **discriminant**.

Propriété 1.3

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$, f n'a pas de zéro.
- Si $\Delta = 0$, f a un unique zéro : $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
  $f(x)$ peut alors s'écrire sous la forme $a(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta > 0$, f a deux zéros :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

  $f(x)$ peut alors s'écrire sous la forme $a(x - x_1)(x - x_2)$.

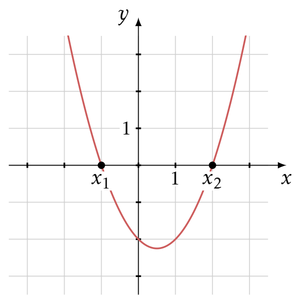
Les formes précédentes sont appelées **forme factorisée** du polynôme ax^2+bx+c.

Remarque 1.4. Si on connaît la forme factorisée d'une fonction polynôme du second degré, on connaît ses zéros. Réciproquement, connaître les zéros d'une fonction polynôme du second degré permet de l'écrire sous forme factorisée.

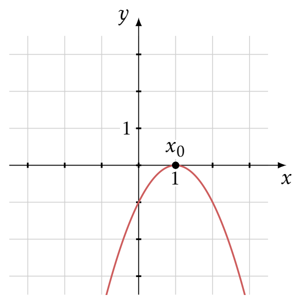
Rappel 1.3. Les zéros de la fonction sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

Illustration

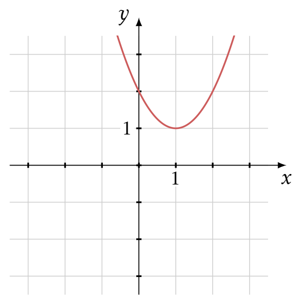
•$\Delta > 0$: deux zéros.



•$\Delta = 0$: un seul zéro.



•$\Delta < 0$: pas de zéro.



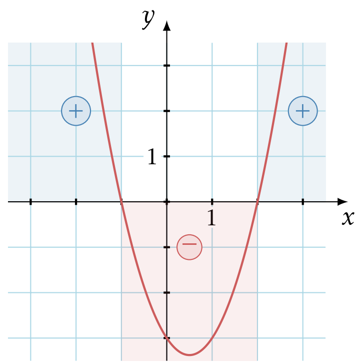
b) Signe

Propriété 1.4

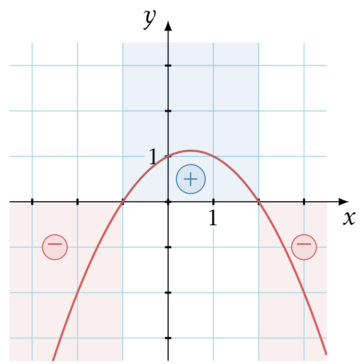
$ax^2 + bx + c$ est du **signe de a sauf entre les racines**, si elles existent.

Illustration

•$f(x) = \frac{3}{2}(x+1)(x-2)$:



•$f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)(x-2)$:



Exemple 1.4. Dresser le tableau de signes de la fonction $f : x \mapsto 3(x+5)(x-4)$.

$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ avec $a = 3$, $x_1 = -5$ et $x_2 = 4$.
$a > 0$, d'où :

x	$-\infty$		-5		4		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

II.4 Propriétés sur les racines

Propriété 1.5

Si le polynôme ax^2+bx+c admet deux racines, distinctes ou confondues, alors la somme S et le produit P de ces racines vérifient :

$$S = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad P = \frac{c}{a}$$

Exemple 1.5. Soit $f : x \mapsto -2x^2 - 10x + 12$.

1. Déterminer une racine évidente de $f(x)$.
   On voit directement que $f(1) = 0$.
2. En déduire une seconde racine.
   La somme des deux racines d'un polynôme du second degré est égale à $-\frac{b}{a}$.
   Ici : $a = -2$ et $b = -10$, d'où $-\frac{b}{a} = -\frac{-10}{-2} = -5$.
   Notons x_2 la seconde racine.
   x_2 vérifie $1 + x_2 = -5$.
   On en déduit $x_2 = -6$.
3. Écrire $f(x)$ sous forme factorisée.
   $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2) = -2(x-1)(x+6)$.

Exercices : B