A Fonction valeur absolue

A.1 Faire ses gammes

1 Traduire une valeur absolue

Sans utiliser la calculatrice, exprimer les nombres suivants sans valeur absolue.

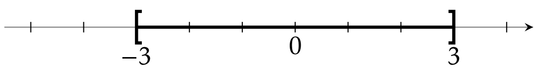
1. $|-4|$.
2. $|1-\sqrt{5}|$.
3. $|\sqrt{10}-3|$.
4. $\left|\frac{4}{9}-\frac{5}{11}\right|$.
5. $|x-7|$.
6. $|4x+8|$.

1. $-4<0$, donc $|-4| = -(-4) = 4$.
2. $1-\sqrt{5}<0$ donc : $|1-\sqrt{5}| = -(1-\sqrt{5}) = -1+\sqrt{5}$.
3. $x-7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 7$. Ainsi : $|x-7| = \begin{cases} x-7 \text{ si } x \geq 7 \\ -(x-7) \text{ si } x<7 \end{cases} = \begin{cases} x-7 \text{ si } x \geq 7 \\ 7-x \text{ si } x<7 \end{cases}$.
4. $\sqrt{10} > \sqrt{9} = 3$, donc $\sqrt{10}-3>0$.
   D'où : $|\sqrt{10}-3| = \sqrt{10}-3$.
5. $\frac{4}{9}-\frac{5}{11} = \frac{4\times 11}{9\times 11} - \frac{5\times 9}{11\times 9} = \frac{44}{99}-\frac{45}{99} = -\frac{1}{99} < 0$.
   Ainsi : $|\frac{4}{9}-\frac{5}{11}| = |-\frac{1}{99}| = -(-\frac{1}{99}) = \frac{1}{99}$.

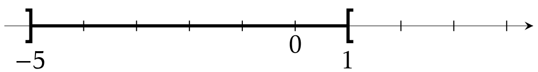
2 Traduire avec la valeur absolue

Dans chacun des cas, déterminer une inéquation faisant intervenir la valeur absolue, dont les réels x appartenant à la zone surlignée sont solutions.

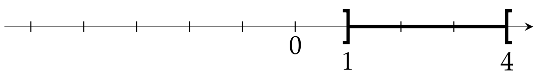
1.



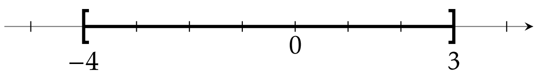
2.



3.



4.



On repère d'abord le centre de l'intervalle. On détermine ensuite la distance aux bornes.

1. $x \in [-3;3] \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow |x| \leq 3$.
2. On cherche le centre de l'intervalle : $\frac{-5+1}{2} = -2$.
   L'intervalle est centré autour de -2.
   $-5<x<1 \Leftrightarrow -3 < x-(-2) < 3 \Leftrightarrow |x+2|<3$.
   Toute valeur prise dans l'intervalle $]-5;1[$ est à une distance strictement inférieure à 3 de -2.
3. $\frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$.
   $1<x<4 \Leftrightarrow 1-\frac{5}{2} < x-\frac{5}{2} < 4-\frac{5}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x-\frac{5}{2} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow |x-\frac{5}{2}| < \frac{3}{2}$.
4. $\frac{-4+3}{2} = -\frac{1}{2}$.
   $-4 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow -4-(-\frac{1}{2}) \leq x-(-\frac{1}{2}) \leq 3-(-\frac{1}{2}) \Leftrightarrow -\frac{7}{2} \leq x+\frac{1}{2} \leq \frac{7}{2}$
   $\Leftrightarrow |x+\frac{1}{2}| \leq \frac{7}{2}$.

3 Équations/inéquations avec valeur absolue

Résoudre les équations/inéquations suivantes :

1. $|x|=2$
2. $|x|=-5$
3. $|x+1|=4$
4. $|x| \leq 6$
5. $|x-\frac{1}{2}|<3$
6. $|x|>3$
7. $|2x+1| \geq 9$

1. $S=\{-2;2\}$.
2. $S=\emptyset$
3. $|x+1|=4 \Leftrightarrow x+1=-4$ **ou** $x+1=4 \Leftrightarrow x=-5$ **ou** $x=3$.
   $S=\{-5;3\}$.
4. $|x| \leq 6 \Leftrightarrow -6 \leq x \leq 6$.
   $S=[-6;6]$.
5. $|x-\frac{1}{2}|<3 \Leftrightarrow -3 < x-\frac{1}{2} < 3 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}$.
   $S = \left]-\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right[$.
6. $|x|>3 \Leftrightarrow x<-3$ **ou** $x>3$.
   $S =]-\infty;-3[\cup]3;+\infty[$.
7.
$$\begin{aligned} |2x+1| \geq 9 &\Leftrightarrow 2x+1 \leq -9 \textbf{ ou } 2x+1 \geq 9 \\ &\Leftrightarrow 2x \leq -10 \textbf{ ou } 2x \geq 8 \\ &\Leftrightarrow x \leq -5 \textbf{ ou } x \geq 4 \end{aligned}$$
   $S =]-\infty;-5] \cup [4;+\infty[$.

4 Encadrement

Dans chacun des cas, encadrer $|x|$, sans justifier :

1. $1<x<3$.
2. $-3 \leq x < 0$.
3. $-5<x<\frac{1}{2}$
4. $-2\pi < x \leq 3\pi$.

1. $1 < x < 3 \Rightarrow 1 < |x| < 3$.
2. $-3 \leq x < 0 \Rightarrow 0 < |x| \leq 3$
3. $-5 < x < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq |x| < 5$
4. $-2\pi < x \leq 3\pi \Rightarrow 0 \leq |x| \leq 3\pi$

A.2 Exercices d'entraînement

5 Traduire à l'aide de la valeur absolue :

1. $x \in \left[2-\mu; 2+\mu\right]$, avec $\mu \in \mathbb{R}$.
2. $l - \varepsilon < x < l + \varepsilon$, avec l et ε deux réels.
3. $x \in]-\infty; -a] \cup [a; +\infty[$, avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.
4. $f(x) \in]l-\varepsilon; l+\varepsilon[$ avec $l \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

1. $|x-2| \leq \mu$
2. $|x-l| < \varepsilon$
3. $|x-0| \geq a$, soit plus simplement $|x| \geq a$.
4. $|f(x) - l| < \varepsilon$.

6 Propriété de la valeur absolue

Soient x et y deux réels.

1. Comparer $|xy|$ et $|x| \times |y|$ dans chacun des cas suivants :
   (a) $x = 0$ ou $y = 0$ (b) $x < 0$ et $y > 0$ (c) $x > 0$ et $y > 0$ (d) $x < 0$ et $y < 0$
2. Conclure.

1. (a) $xy = 0$, donc $|xy| = |0| = 0$.
   $|x| = 0$ ou $|y| = 0$, donc $|x| \times |y| = 0$.
   Donc $|xy| = |x| \times |y|$.

   (b) $xy < 0$, donc $|xy| = -xy$.
   $|x| \times |y| = -x \times y = -xy$.
   Donc $|xy| = |x| \times |y|$.

   (c) $xy < 0$, donc $|xy| = -xy$.
   $|x| \times |y| = x \times (-y) = -xy$.
   Donc $|xy| = |x| \times |y|$.

   (d) $xy > 0$, donc $|xy| = xy$.
   $|x| \times |y| = -x \times (-y) = xy$.
   Donc $|xy| = |x| \times |y|$.
2. Dans tous les cas de figure possibles, $|xy| = |x| \times |y|$.
   On en déduit que pour tous réels x et y, $|xy| = |x| \times |y|$.

B Fonctions polynômes du second degré

B.1 Faire ses gammes

7 Reconnaître la forme d'un polynôme du second degré

Dans chacun des cas, préciser la forme de l'expression, et les valeurs de a, b, c ou a, α, β ou a, x_1, x_2.

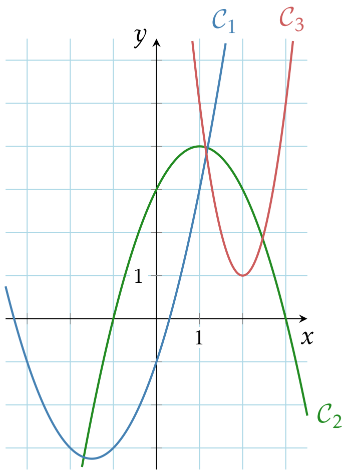
1. $f(x) = x - 2x^2 - 5$
2. $f(x) = 4(x+1)(x-1)$
3. $f(x) = x^2 - \pi x$
4. $f(x) = 6x^2$
5. $f(x) = -(x-2)^2 + 5$
6. $f(x) = -7(x-8)(x+2)$
7. $f(x) = 12 + 3(x+4)^2$

1. Forme développée avec $a = -2$, $b = 1$ et $c = -5$.
2. Forme factorisée avec $a = 4$, $x_1 = -1$ et $x_2 = 1$.
3. Forme développée avec $a = 1$, $b = \pi$ et $c = 0$.
4. Forme développée avec $a = 6$, $b = 0$ et $c = 0$.
5. Forme canonique avec $a = -1$, $\alpha = 2$ et $\beta = 5$.
6. Forme factorisée avec $a = -7$, $x_1 = 8$ et $x_2 = -2$.
7. Forme canonique avec $a = 3$, $\alpha = -4$ et $\beta = 12$.

8 Associer une fonction à sa courbe représentative

Soient f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = -(x-3)(x+1)$
- $g(x) = x^2 + 3x - 1$
- $h(x) = 4(x-2)^2 + 1$



1. Associer chaque courbe à sa fonction en justifiant.
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_1$ avec l'axe des abscisses.
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{C}_3$ avec l'axe des ordonnées.

1. - $\mathcal{C}_1$ passe par $(0 ; -1)$. La fonction associée vérifie donc $f(0) = -1$. Il s'agit de la fonction g (forme développée avec $c = -1$).
   - $\mathcal{C}_2$ intersecte l'axe des abscisses en -1 et en 3. Donc la fonction associée a pour zéros -1 et 3. Il s'agit de la fonction f (forme factorisée avec $x_1 = 3$ et $x_2 = -1$).

- $\mathcal{C}_3$ a pour sommet $(1\ ;\ 4)$.
  La fonction associée vérifie donc $\alpha = 2$ et $\beta 1$.
  Il s'agit de la fonction h (forme canonique avec $\alpha = 2$ et $\beta = 1$).

2. $\mathcal{C}_1$ est la courbe représentative de la fonction g.
   Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_g$ revient à chercher les zéros de g.
   $g(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = 3$ et $c = -1$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4\times 1\times(-1) = 13$.
   $\Delta > 0$, donc $g(x) = 0$ a deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{13}}{2\times 1} = \frac{-3-\sqrt{13}}{2} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{13}}{2\times 1} = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$$

   Les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_1$ avec l'axe des abscisses sont donc $\left(\frac{-3-\sqrt{13}}{2}\ ;\ 0\right)$ et $\left(\frac{-3+\sqrt{13}}{2}\ ;\ 0\right)$.

3. $\mathcal{C}_3$ est la courbe représentative de h.
   $h(0) = 4(0-2)^2 + 1 = 4\times 4 + 1 = 17$.
   Donc les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}_3$ avec l'axe des ordonnées sont $(0\ ;\ 17)$.

9 Tableau de variations

Dans chacun des cas, dresser le tableau de variations de f.

1. $f(x) = 5 + (x-2)^2$
2. $f(x) = -8(x+4)^2 - \frac{1}{2}$
3. $f(x) = x^2 + 7$
4. $f(x) = -3x^2 + \frac{4}{7}$
5. $f(x) = -1 - \frac{1}{2}(x+\sqrt{2})^2$

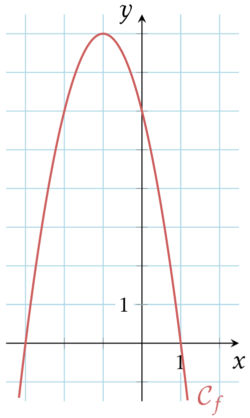
1. On reconnaît une forme canonique avec $a = 1$, $\alpha = 2$ et $\beta = 5$. Donc f est décroissante puis croissante, et $\mathscr{C}_f$ a pour sommet $(2;5)$.
2. On reconnaît une forme canonique avec $a = -8$, $\alpha = -4$ et $\beta = -\frac{1}{2}$. Donc f est croissante puis décroissante, et $\mathscr{C}_f$ a pour sommet $(-4;-\frac{1}{2})$.
3. On reconnaît une forme canonique avec $a = 1$, $\alpha = 0$ et $\beta = 7$. Donc f est décroissante puis croissante, et $\mathscr{C}_f$ a pour sommet $(0;7)$.
4. On reconnaît une forme canonique avec $a = -3$, $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{4}{7}$. Donc f est croissante puis décroissante, et $\mathscr{C}_f$ a pour sommet $(0;\frac{4}{7})$.
5. On reconnaît une forme canonique avec $a = -\frac{1}{2}$, $\alpha = -\sqrt{2}$ et $\beta = -1$. Donc f est croissante puis décroissante, et $\mathscr{C}_f$ a pour sommet $(-\sqrt{2};-1)$.

10 Analyser une courbe représentative

Soit f une fonction polynôme du second degré telle que :

- $f(x) = ax^2 + bc + c$
- $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$
- $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

On donne ci-contre sa courbe représentative.



1. Graphiquement, déterminer le signe de a ainsi que les valeurs de α, β, x_1, x_2 et c.
2. En déduire la valeur de a, puis la valeur de b.

1.
   - f est croissante puis décroissante, donc $a < 0$.
   - Le sommet de $\mathscr{C}_f$ a pour coordonnées $(-1;8)$ donc $\alpha = -1$ et $\beta = 8$.
   - Les points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abcsisses sont $(-3;0)$ et $(1;0)$, donc les racines du polynômes sont $x_1 = -3$ et $x_2 = 1$.
2. On a : $\begin{cases} f(x) = a\big(x-(-3)\big)(x-1) \\ f(x) = a\big(x-(-1)\big)^2 + 8 \end{cases}$.
   Donc $a(x+3)(x-1) = a(x+1)^2 + 8$.
   Or :

$$\begin{aligned} a(x+3)(x-1) = a(x+1)^2 + 8 &\Leftrightarrow a(x^2 - x + 3x - 3) = a(x^2 + 2x + 1) + 8 \\ &\Leftrightarrow ax^2 + 2ax - 3a = ax^2 + 2ax + a + 8 \\ &\Leftrightarrow -3a = a + 8 \\ &\Leftrightarrow -4a = 8 \\ &\Leftrightarrow a = -2 \end{aligned}$$

11 Tableau de signes

Pour chaque fonction polynôme du second degré, dresser son tableau de signes.

1. $f(x) = (x-3)(x+1)$
2. $g(x) = \left(-x - \frac{1}{2}\right)(x-2)$
3. $h(x) = \left(x - \sqrt{2}\right)(2x - 2\pi)$
4. $\varphi(x) = (x-5)\left(x - \frac{1}{3}\right)$
5. $\psi(x) = -(x+1)^2$

1. $a = 1$, $x_1 = 3$ et $x_2 = -1$.
   D'où :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. $a = -1$, $x_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = 2$.
   D'où :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3. $a = 2$, $x_1 = \pi$ et $x_2 = \sqrt{2}$.
   D'où :

x	$-\infty$		$\sqrt{2}$		π		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4. $a = 1$, $x_1 = \frac{1}{3}$ et $x_2 = 5$.
   D'où :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		5		$+\infty$
$\varphi(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

5. $a = 1$, $x_0 = -1$.
   D'où :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$\psi(x)$		$-$	0	$-$	

B.2 Exercices d'entraînement

12 Déterminer une expression

Soit f une fonction polynôme du second degré telle que :

1. Les antécédents de 0 par f sont -2 et 4.
2. L'image de 5 par f est -2.

Déterminer l'expression de f en fonction de x.

1. $x_1 = -2$ et $x_2 = 4$.
   Donc $f(x)$ est de la forme $a\big(x-(-2)\big)(x-4)$, soit $a(x+2)(x-4)$.
2.

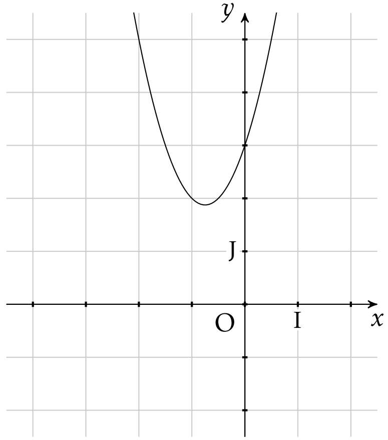
$$\begin{aligned} f(5) = -2 &\Leftrightarrow a(5+2)(5-4) = -2 \\ &\Leftrightarrow a \times 7 \times 1 = -2 \\ &\Leftrightarrow 7a = -2 \\ &\Leftrightarrow a = -\frac{2}{7} \end{aligned}$$

   Donc $f(x) = -\frac{2}{7}(x+2)(x-4)$.
   Sous forme développée : $f(x) = -\frac{2x^2}{7} + \frac{4x}{7} + \frac{16}{7}$.

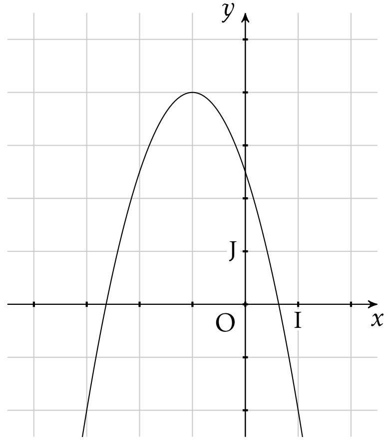
13 Déterminer l'expression d'une fonction à partir de sa courbe représentative

Dans chacun des cas, déterminer l'expression de la fonction polynôme du second degré f dont la courbe est tracée.

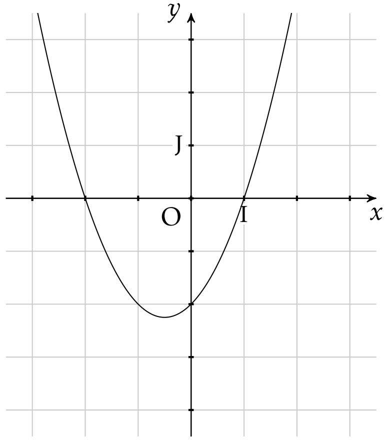
①



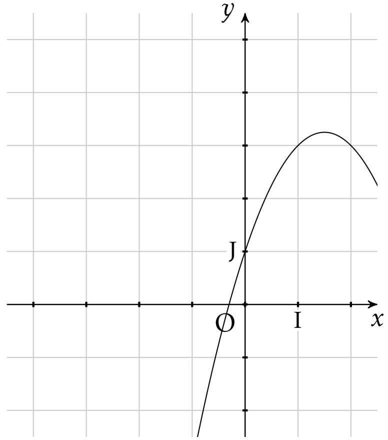
②



③



④



1. $f(0) = 3$, on en déduit que $c = 3$.
   On a donc : $f(x) = ax^2 + bx + 3$.
   De plus : $f(-2) = 5$.
   Or :$f(-2) = 5 \Leftrightarrow 4a - 2b + 3 = 5 \Leftrightarrow 4a - 2b = 2$.
   De même : $f(-1) = 2$.
   Or :$f(-1) = 2 \Leftrightarrow a - b + 3 = 2 \Leftrightarrow a - b = -1$.

$$\begin{cases} 4a - 2b = 2 \\ a - b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,5 + 0,5b \\ (0,5 + 0,5b) - b = -1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,5 + 0,5b \\ -0,5b = -1,5 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

   On en déduit que f a pour expression $f(x) = \underbrace{2x^2 + 3x + 3}_{\text{forme développée}}$.

2. Le sommet a pour coordonnées $(-1;4)$.
   On en déduit $\alpha = -1$ et $\beta = 4$.
   L'expression de f est donc de la forme $a\left(x - (-1)\right)^2 + 4 = a(x+1)^2 + 4$
   Pour trouver a, on utilise un point supplémentaire.
   Par exemple, on peut lire graphiquement que $f(-3) = -2$.
   Or :
   $f(-3) = -2 \Leftrightarrow a(-3+1)^2 + 4 = -2 \Leftrightarrow 4a = -6 \Leftrightarrow a = -1,5$.

   Finalement, on a donc :
$$f(x) = \underbrace{-1,5(x+1)^2 + 4}_{\text{forme canonique}} = -1,5\left(x^2 + 2 \times x \times 1 + 1\right) + 4 = \underbrace{-1,5x^2 - 3x + 2,5}_{\text{forme développée}}$$

3. La courbe coupe l'axe des abscisses en $x_1 = -2$ et en $x_2 = 1$.
   On en déduit : $f(x) = a(x - (-2))(x - 1)$.
   De plus, on lit graphiquement : $f(-1) = -2$.
   Or : $f(-1) = -2 \Leftrightarrow -2 = a(-1+2)(-1-1) \Leftrightarrow -2 = a \times (-2) \Leftrightarrow a = 1$
   On a donc $f(x) = \underbrace{(x+2)(x-1)}_{\text{forme factorisée}} = (x^2 - x + 2x - 2) = \underbrace{x^2 + x - 2}_{\text{forme développée}}$

4. $f(0) = 1$, on en déduit que $c = 1$.
   On a donc : $f(x) = ax^2 + bx + 1$.
   De plus : $f(1) = 3$.
   Or :$f(1) = 3 \Leftrightarrow 1a + 1b + 1 = 3 \Leftrightarrow 1a + 1b = 2$.

   De même : $f(2) = 3$.
   Or :$f(2) = 3 \Leftrightarrow 4a + 2b + 1 = 3 \Leftrightarrow 4a + 2b = 2$.

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 4a + 2b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 - b \\ 4(2-b) + 2b = 2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 - b \\ -2b = -6 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}$$

   On en déduit que f a pour expression $f(x) = \underbrace{-x^2 + 3x + 1}_{\text{forme développée}}$.

14 Intersection de deux courbes

Soient f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = 6x - 9$.

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer (i.e faire une hypothèse sur) les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
2. Démontrer la conjecture émise.

1. Les deux courbes semblent avoir un unique point d'intersection, de coordonnées $(3;9)$.

2.

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow x^2 = 6x - 9 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 3 \end{aligned}$$

Il y a donc un unique point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$. Il a pour abscisse 3.
Ce point appartient à $\mathscr{C}_f$, donc on trouve son ordonnée en calculant $f(3)$.
$f(3) = 3^2 = 9$.
Donc le point d'intersection a pour coordonnées $(3;9)$, la conjecture est vraie.

15 Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 - 3x - 1 \quad \text{et} \quad g(x) = -x^2 + 2x + 1$$

1. Dresser le tableau de signes et le tableau de variations de chaque fonction.
2. Dans le même repère, tracer une allure des deux courbes représentatives.
   (a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
   (b) Déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

1. • Étude de f :
   - ⋄ $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 17$.
     On trouve ensuite $x_1 = -\frac{\sqrt{17}}{4} + \frac{3}{4}$ et $x_2 = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}$.
     $a = 2 > 0$, d'où :

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{17}}{4} + \frac{3}{4}$		$\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   - ⋄ $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-3)}{2\times 2} = \frac{3}{4}$.
     $f(\alpha) = f\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{17}{8}$.
     $a = 2 > 0$, d'où :

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{17}{8}$	$\nearrow$	

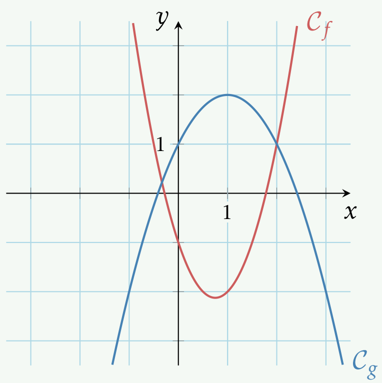
   • Étude de g :
   - ⋄ $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 8$.
     On trouve ensuite $x_1 = -\sqrt{2} + 1$ et $x_2 = -\sqrt{2} + 1$.
     $a = -1 > 0$, d'où :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}+1$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   - ⋄ $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2\times(-1)} = 1$.
     $g(\alpha) = g(1) = 2$.
     $a = -1 > 0$, d'où :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	2	$\searrow$	

2.



(a) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$.
$f(x) - g(x) = 3x^2 - 5x - 2$.
Notons $h(x) = 3x^2 - 5x - 2$.
$h(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = 3$, $b = -5$ et $c = -2$.
$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 49$.
$\Delta > 0$, donc h admet deux zéros et $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont deux points d'intersection.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-(-5) - \sqrt{49}}{2 \times 3} \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-(-5) + \sqrt{49}}{2 \times 3} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Notons I_1 et I_2 les points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
I_1 et I_2 ont pour abscisses $-\frac{1}{3}$ et 2.
$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}$ et $f(2) = 1$.
Donc $I_1\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{9}\right)$ et $I_2(2;1)$.

(b) $f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) > 0 \Leftrightarrow h(x) > 0$.
Étudions le signe de $h(x)$.
D'après ce qui précède, h admet pour zéros $-\frac{1}{3}$ et 2.
$a = 3 > 0$, donc :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[$ et sur $]2;+\infty[$, et en dessous sur $\left]-\frac{1}{3};2\right[$.

16 Un fermier cherche à optimiser la production d'un verger de pêchiers.
Pour chaque hectare, si 45 arbres sont plantés, chacun d'entre eux produit 550 pêches par an.
Pour chaque arbre supplémentaire, la production de chaque arbre se voit réduite de 6 pêches/an.

1. Combien d'arbres supplémentaires doit-il planter par hectare pour optimiser sa récolte ?
2. Quelle est alors la production par hectare ?

1. Soit x le nombre supplémentaire d'arbres plantés.
   Chaque arbre produit $550 - 6x$ pêches par an.
   Notons $P(x)$ la production annuelle de pêches.
   On a $P(x) = (45 + x)(550 - 6x) = -6x^2 + 280x + 24750$.
   On peut remarquer que $a < 0$ et donc que f admet un maximum.
   $-\frac{b}{2a} = -\frac{280}{2\times(-6)} = \frac{70}{3}$.
   $P(23) = 28016$ et $P(24) = 28014$.
   Il faut donc planter 23 arbres supplémentaires, soit 68 en tout, pour que la production soit maximale.
2. La production sera alors de 28016 pêches sur l'année.

17 Une entreprise produit de la farine de blé.
On note x le nombre de tonnes fabriquées.
La tonne est vendue 120 €, et le coût de fabrication, en euros, est donné par :

$$C(x) = 2x^2 + 10x + 900$$

1. Combien de tonnes doit produire l'entreprise pour être rentable ?
2. Déterminer la production correspondant à un bénéfice maximal.

1. La recette de l'entreprise est donnée par $R(x) = 120x$.
   Le bénéfice est donc donné par : $B(x) = R(x) - C(x) = -2x^2 + 110x - 900$.
   On cherche pour quelle valeurs de x on a $B(x) > 0$.
   $B(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = -2$, $b = 110$ et $c = -900$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 110^2 - 4\times(-2)\times(-900) = 4900$.
   $\Delta > 0$, donc $B(x) = 0$ admet deux solutions réelles.

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-110-\sqrt{4900}}{2\times(-2)} = 45$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-110+\sqrt{4900}}{2\times(-2)} = 10$$

   $a = -2 > 0$, d'où :

x	0		10		45		$+\infty$
$B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

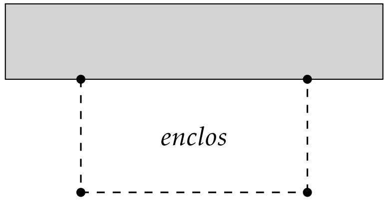
   Pour être rentable, l'entreprise doit donc produit entre 10 et 45 tonnes.
2. $a = -2$, donc B admet un maximum.
   $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{110}{2\times(-2)} = \frac{55}{2}$.
   Pour maximiser les bénéfices, l'entreprise doit donc produire 27,5 tonnes.
   $B(\alpha) = \frac{1225}{2}$, donc le bénéfice est alors de 612,5 €.

18 Une agence organise une activité pour 40 € par personne pour les 26 premiers participants.
Au-delà, pour chaque personne supplémentaire, chaque membre du groupe obtient une réduction de 0,25 €.
Ainsi, pour un groupe de 27 personnes, le prix par personne est de 39,75 €.
Pour combien de personnes l'agence gagne-t-elle le plus ?

Notons x le nombre de participants supplémentaires au-delà de 26.
Notons $R(x)$ la recette de l'agence, en euros. $R(x) = (26 + x)(40 - 0{,}25x)$.
Sous forme développée, on trouve : $R(x) = -0{,}25x^2 + 33{,}5x + 1040$. On cherche le maximum de R.
$R(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = -0{,}25$, $b = 33{,}5$ et $c = 1040$.
$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{33{,}5}{2\times(-0{,}25)} = 67$.
Donc l'agence maximise sa recette pour 67 personnes supplémentaires, soit 93

personnes en tout.
$\beta = R(\alpha) = R(67) = 2162{,}25$.
La recette est alors de 2162,25 €.

19 Un particulier dispose de 19 mètres de grillage qu'il souhaite utiliser pour fabriquer un poulailler.
Il souhaite construire un enclos rectangulaire en utilisant un mur déjà existant, et voudrait obtenir la surface au sol la plus grande possible.



Déterminer la largeur et la longueur que doit avoir l'enclos.

Notons x la largeur de l'enclos.
La longueur est alors nécessairement égale à $19-2x$.
Notons $A(x)$ l'aire de l'enclos.
$A(x) = x \times (-2x+19) = -2x^2+19x$.
$A(x) = ax^2+bx+c$ avec $a=-2$, $b=19$ et $c=0$.
$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{19}{2\times(-2)} = \frac{19}{4}$.
Donc la largeur de l'enclos doit être égale à 4,75 mètres pour maximiser l'aire.
$19-2\times\frac{19}{4} = \frac{19}{2}$.
La longueur est alors de 9,5 mètres.
$A\left(\frac{19}{4}\right) = \frac{361}{8}$.
L'enclos a alors une surface de 45,125 m^2.