

# 1

## Fonctions de référence

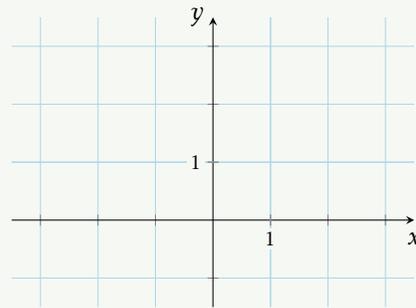
### I Fonction valeur absolue

#### Définition 1.1 – Valeur absolue

La fonction valeur absolue est la fonction :

$$f : \dots \rightarrow \dots$$

$$x \mapsto \dots = \begin{cases} \dots & \text{si } x \geq 0 \\ \dots & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



**Rappel 1.1.**  $|a - b|$  donne la distance entre les réels  $a$  et  $b$ . Cas particulier :  $|x|$  donne la distance entre  $x$  et 0.

#### Exemple 1.1.

- Résoudre  $|x - 1| \geq 3$  puis représenter graphiquement les solutions sur la droite des réels.
- Soit  $x \in ]-3; 4]$ . En utilisant la courbe représentative de la fonction valeur absolue, déterminer un encadrement de  $|x|$ .

**Exercices : A**

## II Fonctions polynômes du second degré

### II.1 Définition

#### Définition 1.2

Une fonction polynôme du second degré est une fonction de la forme  $f : x \mapsto \dots$ , avec  $a, b, c \in \mathbb{R}$  et  $a \neq 0$ .  
Sa courbe représentative est une \_\_\_\_\_.

#### Remarque 1.1.

- $c = f(0)$ . On peut donc déterminer la valeur de  $c$  graphiquement en regardant l'ordonnée à l'origine.
- Nous avons déjà étudié auparavant une fonction polynôme du second degré particulière : la fonction carré ( $a = 1, b = 0$  et  $c = 0$ ).

**Exemple 1.2.** Les fonctions suivantes sont-elles des fonctions polynômes du second degré? Préciser les coefficients  $a, b$  et  $c$  associés.

- $f : x \mapsto 2x^2 - 3x + 1$
- $f : x \mapsto x^2$
- $f : x \mapsto -x^2 + 4x$
- $f : x \mapsto -4x + 3$
- $f : x \mapsto (-x - 2)(x + 3)$

## II.2 Extremum et sens de variation

### Propriété 1.1

Toute fonction polynôme du second degré  $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$  peut s'écrire sous forme \_\_\_\_\_ :

$$f(x) = \dots\dots\dots$$

où  $\alpha = \dots$  et  $\beta = \dots = \dots$

DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ &= a(x - \alpha)^2 + \beta \end{aligned}$$

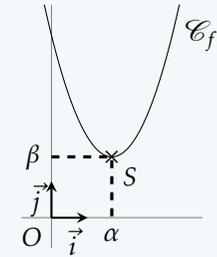
avec  $\alpha = -\frac{b}{2a}$  et  $\beta = -\frac{\Delta}{4a}$ .  
 $f(\alpha) = a(\alpha - \alpha)^2 + \beta = \beta$ . □

### Propriété 1.2

Le point  $S(\alpha ; \beta)$  est le sommet de  $\mathcal{C}_f$ .  
 $\beta$  est appelé \_\_\_\_\_ de  $f$  (atteint en  $\alpha$ ).

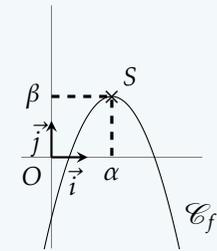
• Si  $a > 0$ , alors  $\beta$  est un \_\_\_\_\_

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f(x)$			



• Si  $a < 0$ , alors  $\beta$  est un \_\_\_\_\_ :

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f(x)$			



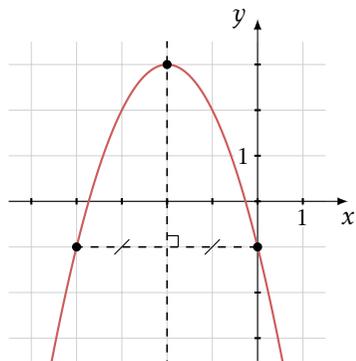
DÉMONSTRATION

- Cas 1 :  $a > 0$ .  
 Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R} : (x - \alpha)^2 \geq 0$ .  
 Or  $a > 0$ , donc :  $\forall x \in \mathbb{R}, a(x - \alpha)^2 \geq 0$   
 Ainsi :  $\forall x \in \mathbb{R}, a(x - \alpha)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a(x - \alpha)^2 + \beta \geq \beta \Leftrightarrow f(x) \geq \beta$ . (On dit alors que  $\beta$  est un *minorant* de  $f$ )  
 De plus :  $f(\alpha) = a(\alpha - \alpha)^2 + \beta = a \times 0 + \beta = \beta$ .  
 Donc  $\beta$  est le *minimum* de  $f$  et il est atteint en  $x = \alpha$ .
- Cas 2 :  $a < 0$ .  
 Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R} : (x - \alpha)^2 \geq 0$ .  
 Or  $a < 0$ , donc :  $\forall x \in \mathbb{R}, a(x - \alpha)^2 \leq 0$   
 Ainsi :  $\forall x \in \mathbb{R}, a(x - \alpha)^2 \leq 0 \Leftrightarrow a(x - \alpha)^2 + \beta \leq \beta \Leftrightarrow f(x) \leq \beta$ . (On dit alors que  $\beta$  est un *majorant* de  $f$ )  
 De plus :  $f(\alpha) = a(\alpha - \alpha)^2 + \beta = a \times 0 + \beta = \beta$ .  
 Donc  $\beta$  est le *maximum* de  $f$  et il est atteint en  $x = \alpha$ . □

**Remarque 1.2.** La parabole est tournée vers le haut lorsque  $a > 0$  (penser au cas de la fonction carré), et vers le bas lorsque  $a < 0$ .

**Remarque 1.3.** Dans un repère orthonormé,  $\mathcal{C}_f$  est symétrique par rapport à la droite d'équation  $x = -\frac{b}{2a}$ .

**Exemple 1.3.** Dresser le tableau de variations de la fonction  $f : x \mapsto -x^2 - 4x - 1$ , puis tracer une allure de sa courbe représentative dans le repère ci-dessous.



### II.3 Zéros et signe

#### a) Zéros

**Rappel 1.2.**  $\Delta = b^2 - 4ac$  est appelé \_\_\_\_\_.

#### Propriété 1.3

Soit  $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ .

- Si  $\Delta < 0$ ,  $f$  n'a pas de zéro.
- Si  $\Delta = 0$ ,  $f$  a un unique zéro :  $x_0 = \dots$   
 $f(x)$  peut alors s'écrire sous la forme  $\dots$
- Si  $\Delta > 0$ ,  $f$  a deux zéros :

$$x_1 = \dots \text{ et } x_2 = \dots$$

$f(x)$  peut alors s'écrire sous la forme  $\dots$

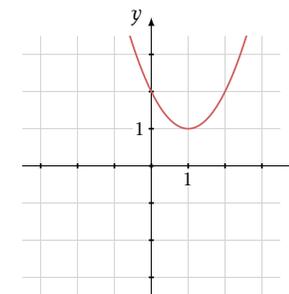
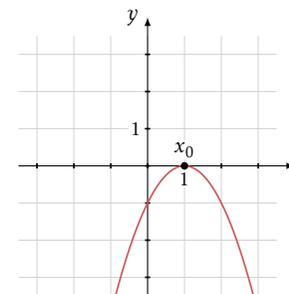
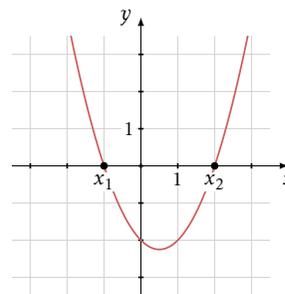
Les formes précédentes sont appelées \_\_\_\_\_ du polynôme  $ax^2 + bx + c$ .

**Remarque 1.4.** Si on connaît la forme factorisée d'une fonction polynôme du second degré, on connaît ses zéros. Réciproquement, connaître les zéros d'une fonction polynôme du second degré permet de l'écrire sous forme factorisée.

**Rappel 1.3.** Les zéros de la fonction sont les abscisses des points d'intersection de  $\mathcal{C}_f$  avec l'axe des abscisses.

#### Illustration

- $\Delta > 0$  : deux zéros.
- $\Delta = 0$  : un seul zéro.
- $\Delta < 0$  : pas de zéro.



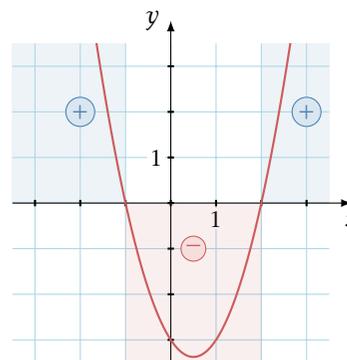
#### b) Signe

#### Propriété 1.4

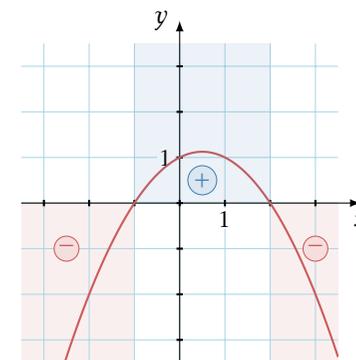
$ax^2 + bx + c$  est du \_\_\_\_\_, si elles existent.

#### Illustration

•  $f(x) = \frac{3}{2}(x+1)(x-2)$  :



•  $f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)(x-2)$  :



**Exemple 1.4.** Dresser le tableau de signes de la fonction  $f : x \mapsto 3(x+5)(x-4)$ .



## II.4 Propriétés sur les racines

### Propriété 1.5

Si le polynôme  $ax^2 + bx + c$  admet deux racines, distinctes ou confondues, alors la somme  $S$  et le produit  $P$  de ces racines vérifient :

$$S = \dots \quad \text{et} \quad P = \dots$$

**Exemple 1.5.** Soit  $f : x \mapsto -2x^2 - 10x + 12$ .

1. Déterminer une racine évidente de  $f(x)$ .
2. En déduire une seconde racine.
3. Écrire  $f(x)$  sous forme factorisée.

 Exercices : B