A Suites arithmétiques

A.1 Faire ses gammes

1 Dans chacun des cas, calculer u_7 et u_{18}.
Soit (u_n) la suite arithmétique :

1. de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $r = 2$.
2. de premier terme $u_0 = -\frac{1}{2}$ et de raison $r = -1$.
3. de premier terme $u_4 = 5$ et de raison $r = -4$.
4. de premier terme $u_2 = 8$ et de raison $r = -\frac{1}{3}$.

1. $u_n = 3 + 2n$. $u_7 = 17$ et $u_{18} = 39$.
2. $u_n = -\frac{1}{2} - n$. $u_7 = -7.5$ et $u_{18} = -18.5$.
3. $u_n = 5 + (n-4) \times (-4) = 21 - 4n$. $u_7 = -7$ et $u_{18} = -51$.
4. $u_n = 8 + (n-2) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{26}{3} - \frac{1}{3}n$.
   $u_7 = \frac{26}{3} - \frac{1}{3} \times 7 = \frac{19}{3}$ et $u_{18} = \frac{26}{3} - \frac{1}{3} \times 18 = \frac{8}{3}$.

2 Dans chacun des cas, déterminer le sens de variations de la suite (u_n).

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = 2 - n$.

   (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = -1$.
   $r < 0$, donc (u_n) est décroissante.

2. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = -3 + 4n$.

   (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = -3$ et de raison $r = 4$.
   $r > 0$, donc (u_n) est croissante.

3. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_0 = 9$ et $u_{n+1} = u_n - 4$.

   (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = 9$ et de raison $r = -4$.
   $r < 0$, donc (u_n) est décroissante.

4. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 7$.

   (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 7$.
   $r > 0$, donc (u_n) est croissante.

3 Calculer chacune des sommes suivantes :

1. $-1 + 2 + 5 + \ldots + 23$
2. $6 + 11 + 16 + \ldots + 41$
3. $3 + 1 - 1 - \ldots - 17$
4. $3 + 9 + 15 + \ldots + 45$

1. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -1$ et de raison 3.

$$\begin{aligned} -1 + 2 + 5 + \ldots + 23 &= u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_8 \\ &= (8 - 0 + 1) \times \frac{u_0 + u_8}{2} \\ &= 9 \times \frac{-1 + 23}{2} \\ &= 9 \times 11 \\ &= 99 \end{aligned}$$

2. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 6$ et de raison 5.

$$\begin{aligned} 6 + 11 + 16 + \ldots + 41 &= u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_7 \\ &= (7 - 0 + 1) \times \frac{u_0 + u_7}{2} \\ &= 8 \times \frac{6 + 41}{2} \\ &= 4 \times 47 \\ &= 188 \end{aligned}$$

3. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison -2.

$$\begin{aligned} 3 + 1 - 1 - \ldots - 17 &= u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{10} \\ &= (10 - 0 + 1) \times \frac{u_0 + u_{10}}{2} \\ &= 11 \times \frac{3 + (-17)}{2} \\ &= 11 \times (-7) \\ &= -77 \end{aligned}$$

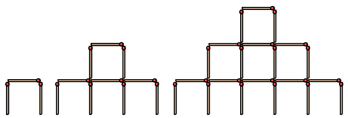
4. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 6.

$$3 + 9 + 15 + \ldots + 45 = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_7$$

$$\begin{aligned} &= (7-0+1)\times\frac{u_0+u_7}{2} \\ &= 8\times\frac{3+45}{2} \\ &= 4\times 48 \\ &= 192 \end{aligned}$$

A.2 Exercices d'entraînement

4 On construit une tour d'allumettes comme suit :



1. Combien faudra-t-il d'allumettes pour construire une tour à 10 étages ?
2. Si vous disposez de 1000 allumettes, combien d'étages pouvez-vous construire ?

1. Soit u_n le nombre d'allumettes nécessaires pour construire le n-ième étage (en partant du sommet).
   On voit sur le schéma ci-dessus :
   - $u_1 = 3$
   - $u_2 = 7$
   - $u_3 = 11$

   Pour contruire l'étage suivant, il y a systématiquement besoin de 4 allumettes supplémentaires.
   (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_1 = 3$ et de raison 4.
   Le nombre d'allumettes nécessaires pour construire une tour à n étages est égal à la somme des nombres d'allumettes nécessaires pour chaque étage.
   Pour 10 étages, le nombre d'allumettes nécessaire est donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} u_k &= (10-1+1)\times\frac{u_1+u_{10}}{2} \\ &= 10\times\frac{3+3+(10-1)\times 4}{2} \\ &= 10\times\frac{42}{2} \\ &= 210 \end{aligned}$$

   Pour construire une tour à 10 étages, il faut donc 210 allumettes.

2. Déterminons le nombre d'allumettes nécessaires pour construire n étages.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} u_k &= (n-1+1)\times\frac{u_1+u_n}{2} \\ &= n\times\frac{3+3+(n-1)\times 4}{2} \\ &= n\times\frac{2+4n}{2} \\ &= \frac{2n+4n^2}{2} \\ &= 2n^2+n \end{aligned}$$

   $2n^2+n = 1000 \Leftrightarrow 2n^2+n-1000 = 0$.
   $\Delta = 1^2 - 4\times 2\times(-1000) = 8001$.
   $\Delta > 0$, donc l'équation a deux solutions réelles.
   On n'en trouve qu'une seule positive : $-\frac{1}{4}+\frac{3\sqrt{889}}{4} \approx 22{,}11$.
   On en déduit qu'on peut faire 22 étages avec 1000 allumettes.

B Suites géométriques

B.1 Faire ses gammes

5 Dans chacun des cas, déterminer la forme explicite de (u_n) et calculer u_4 et u_7.
Soit (u_n) la suite géométrique :

1. de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$.
2. de premier terme $u_0 = -\dfrac{1}{2}$ et de raison $q = -1$.
3. de premier terme $u_2 = 5$ et de raison $q = 3$.
4. de premier terme $u_1 = 38$ et de raison $q = \dfrac{1}{2}$.

1. $u_n = 3\times 2^n$. $u_4 = 48.0$ et $u_7 = 384.0$.
2. $u_n = -\frac{1}{2}\times(-1)^n$. $u_4 = -\frac{1}{2}$ et $u_7 = \frac{1}{2}$.
3. $u_n = 5\times 3^{n-2}$. $u_4 = 45.0$ et $u_7 = 1215.0$.
4. $u_n = 38\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. $u_4 = \frac{38}{8.0} = 4.75$ et $u_7 = \frac{38}{64.0} = \frac{19}{32} = 0.59375$.

6 Dans chacun des cas, déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

1. (u_n) géométrique avec $u_0 = 4$ et de raison 2.

2. $u_0 = -7$ et $u_{n+1} = 3u_n$
3. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
4. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

1. $u_0 > 0$ et $q > 1$ donc (u_n) est croissante.
2. $u_0 = -7 < 0$ et $q = 3 > 1$ donc (u_n) est décroissante.
3. $u_0 = -1 < 0$ et $q = \frac{1}{2} \in]0;1[$ donc (u_n) est croissante.
4. $u_0 = 5 > 0$ et $q = \frac{1}{3} \in]0;1[$ donc (u_n) est décroissante.

★★ **7** Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 5 \times 1{,}02^n$.
Calculer $\sum_{k=0}^{19} u_k$ et $\sum_{k=20}^{25} u_k$. *On arrondira le résultat final à 10^{-2} près.*

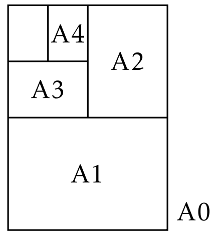
$u_n = u_0 \times q^n$ avec $\begin{cases} u_0 = 5 \\ q = 1{,}02 \end{cases}$, donc (u_n) est géométrique.
Ainsi :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{19} u_k &= u_0 \times \frac{1-1{,}02^{19+1}}{1-1{,}02} \\ &= 5 \times \frac{1-1{,}02^{20}}{-0{,}02} \\ &\approx 121{,}49\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=20}^{25} u_k &= u_{20} \times \frac{1-1{,}02^{25-20+1}}{1-1{,}02} \\ &= 5 \times 1{,}02^{20} \times \frac{1-1{,}02^6}{-0{,}02} \\ &\approx 46{,}87\end{aligned}$$

B.2 Exercices d'entraînement

★★ **8** Une feuille de papier de format A0 a pour surface 1 m^2.
La longueur du format A1 est la largeur du format A0, et sa largeur est la moitié de la longueur du format A0.
Pour obtenir le format A2, on répète le même procédé à partir du format A1, et ainsi de suite. On peut voir le procédé jusqu'au format A4 sur la figure ci-dessous :



Les formats sont tels que le rapport entre la longueur est la largeur soit constant.
On note (L_n) la suite des longueurs et (l_n) la suite des largeurs des formats An.

1. (a) Déterminer la valeur de $\frac{L_n}{l_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire les valeurs de L_0 et l_0.
2. (a) Démontrer que (L_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   (b) Quel est le sens de variation de (L_n) ?
   (c) En déduire l'expression du terme général de L_n en fonction de n.
3. (a) Exprimer l_n en fonction de n.
4. Déterminer les dimensions exactes, puis arrondies au millimètre près, d'une feuille A4.

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{L_n}{l_n} = \frac{L_{n+1}}{l_{n+1}}$.
   Or $L_{n+1} = l_n$ et $l_{n+1} = \frac{L_n}{2}$.
   Ainsi :
   $$\begin{aligned}\frac{L_n}{l_n} = \frac{L_{n+1}}{l_{n+1}} &\Leftrightarrow \frac{L_n}{l_n} = \frac{l_n}{\frac{L_n}{2}} \\ &\Leftrightarrow \frac{L_n}{l_n} = 2 \times \frac{l_n}{L_n} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{L_n}{l_n}\right)^2 = 2 \qquad \Leftrightarrow \frac{L_n}{l_n} = \sqrt{2} \text{ ou } \frac{L_n}{l_n} = -\sqrt{2}\end{aligned}$$
   La seule valeur ayant du sens dans le contexte donné est $\sqrt{2}$.
   Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{L_n}{l_n} = \sqrt{2}$.
   (b) On sait que $L_0 = \sqrt{2} l_0$ et $L_0 \times l_0 = 1$.
   On en déduit $\sqrt{2} l_0 \times l_0 = 1$, soit $\sqrt{2} l_0^2 = 1$.
   $$\begin{aligned}\sqrt{2} l_0^2 = 1 &\Leftrightarrow l_0^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\Leftrightarrow l_0^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow l_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} \text{ ou } l_0 = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

La seule valeur ayant du sens ici est $l_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} \approx 0{,}841$ m.

On en déduit $L_0 = \sqrt{2} \times l_0 = \sqrt{2} \times \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} \approx 1{,}189$ m.

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\frac{L_{n+1}}{L_n} &= \frac{l_n}{L_n} \\ &= \frac{1}{\frac{L_n}{l_n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

C Synthèse

C.1 Faire ses gammes

9 Dans chacun des cas déterminer la nature, le premier terme et la raison de la suite.

1. $u_n = 2n+1$
2. $u_n = 2 \times 4^n$
3. $u_n = 5n$
4. $u_n = \frac{-1}{3^n}$

1. $u_n = u_0 + nr$ avec $u_0 = 1$ et $r = 2$.
   Donc (u_n) est arithmétique de raison 2.
2. $u_n = u_0 \times q^n$ avec $u_0 = 2$ et $q = 4$.
   Donc (u_n) est géométrique de raison 4.
3. $u_n = u_0 + nr$ avec $u_0 = 0$ et $r = 5$.
   Donc (u_n) est arithmétique de raison 5.
4. $u_n = u_0 \times q^n$ avec $u_0 = -1$ et $q = \frac{1}{3}$.
   Donc (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

C.2 Exercices d'entraînement

10 On s'intéresse à l'évolution d'une population de micro-organismes composée de 1 000 individus.
La population croît de 3 % chaque jour.
On note p_n le nombre d'individus au bout de n jours.

1. Donner p_0, puis calculer p_1 et p_2. On arrondira à l'unité.
2. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Quelle est la nature de la suite (p_n) ?
4. Au bout de combien de temps la population aura-t-elle :
   - doublé ?
   - triplé ?
5. On propose l'algorithme ci-dessous, permettant de trouver rapidement au bout de combien de jours la population aura dépassé un certain seuil S.

```
n ← 0
p ← 1 000
Tant que p < S
   n ← n+1
   p ← p×1,03
Fin Tant que
Afficher n
```

   (a) Compléter l'algorithme.
   (b) Au bout de combien de jours y aura-t-il plus de 5 000 individus ?

1. $p_0 = 1\ 000$.
   $p_1 = 1\ 000 \times 1,03 = 1\ 030$.
   $p_2 = 1\ 030 \times 1,03 \approx 1\ 061$.
2. $p_{n+1} = p_n \times 1,03$.
3. (p_n) est une suite géométrique.
4. On cherche pour quelles valeurs de n on a $1,03^n \geqslant 2$.
   On trouve $n = 24$.
   La population aura donc doublé au bout de 24 jours.
   On cherche ensuite pour quelles valeurs de n on a $1,03^n \geqslant 3$.
   On trouve $n = 38$.
   La population aura triplé au bout de 38 jours.
5. Il y aura plus de 5 000 individus au bout de 55.

11 Le loyer annuel d'un appartement coûte 6 500 € à l'entrée dans les lieux en 2018.
Chaque année, le loyer annuel augmente de 130 €.
On note u_n le prix du loyer annuel sur l'année $2018 + n$.

1. Déterminer u_0, u_1 et u_2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
2. Quelle est la nature de la suite (u_n)? Préciser sa raison.
3. Exprimer u_n en fonction de n .
4. En déduire la valeur du loyer annuel en 2026.
5. Calculer la somme S_{12} des 12 premiers loyers annuels.

1. $u_0 = 6\ 500$.
   $u_1 = 6\ 500 + 130 = 6\ 630$
   $u_2 = 6\ 630 + 130 = 6\ 760$
   $u_{n+1} = u_n + 130$.
2. $$\begin{aligned} u_n &= u_0 + nr \\ &= 6\ 500 + n \times 130 \\ &= 6\ 500 + 130n \end{aligned}$$
3. (u_n) est arithmétique de raison 130.
4. $2026 = 2018 + 8$.
   $$\begin{aligned} u_8 &= 6\ 500 + 130 \times 8 \\ &= 7\ 540 \end{aligned}$$
   Le loyer annuel en 2026 sera de 7 540 €.
5. $$\begin{aligned} S_{12} &= u_0 + u_1 + \ldots + u_{11} \\ &= \text{nb de termes} \times \frac{\text{1er terme} + \text{dernier terme}}{2} \\ &= 12 \times \frac{u_0 + u_{11}}{2} \\ &= 12 \times \frac{6\ 500 + 7\ 930}{2} \\ &= 86\ 580 \end{aligned}$$
   La somme des 12 premiers loyers annuels est de 86 580 €.