1 Équations du second degré

Introduction Le but de ce chapitre est d'apprendre à déterminer les solutions d'équations de la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

avec a, b et c trois réels ($a \neq 0$), appelées équations du second degré.

Rappel 1.1.

- Identités remarquables :
  1. $a^2 + 2ab + b^2 = \boldsymbol{(a+b)^2}$
  2. $a^2 - 2ab + b^2 = \boldsymbol{(a-b)^2}$
  3. $a^2 - b^2 = \boldsymbol{(a+b)(a-b)}$
- $ab = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a = 0}$ **ou** $\boldsymbol{b = 0}$
- $x^2 = a \Leftrightarrow \boldsymbol{x = \sqrt{a}}$ **ou** $\boldsymbol{x = -\sqrt{a}}$.
  Ex : $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt{4}$ ou $x = -\sqrt{4} \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$.

I Résolution par factorisation

Méthode 1.1.

1. On passe tous les termes de l'équation dans le membre de gauche pour se ramener à une équation de la forme $f(x) = 0$.
2. On factorise le plus possible le membre de gauche si besoin à l'aide d'identités remarquables.
3. On résout l'équation produit nulle ainsi obtenue.

Méthode 1.2.

1. On se ramène à une équation de la forme $f(x)^2 = a$ à l'aide de factorisations.
2. On en déduit $f(x) = \sqrt{a}$ ou $f(x) = -\sqrt{a}$.

Exemple 1.1. Résoudre les équations suivantes :

1. $x^2 - 8x = 2x$.

$$\begin{aligned} x^2 - 8x = 2x &\Leftrightarrow x^2 - 10x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x-10) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 10 \end{aligned}$$

$$S = \{0\,;\,10\}$$

2. $x^2 - 5 = 4$.

$$\begin{aligned} x^2 - 5 = 4 &\Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+3)(x-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -3 \quad \text{ou} \quad x = 3 \end{aligned}$$

$$S = \{-3\,;\,3\}$$

3. $x^2 + 4 = 4x$.

$$\begin{aligned} x^2 + 4 = 4x &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2 \times 2x + 2^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \end{aligned}$$

$$S = \{2\}$$

4. $x^2 + 18x + 81 = 16$.

$$\begin{aligned} x^2 + 18x + 81 = 16 &\Leftrightarrow x^2 + 2 \times 9x + 9^2 = 16 \\ &\Leftrightarrow (x+9)^2 = 16 \\ &\Leftrightarrow x + 9 = \sqrt{16} \quad \text{ou} \quad x + 9 = -\sqrt{16} \\ &\Leftrightarrow x = 4 - 9 \quad \text{ou} \quad x = -4 - 9 \\ &\Leftrightarrow x = -5 \quad \text{ou} \quad x = -13 \end{aligned}$$

Exercices : A

II Résolution générale

Propriété 1.1 – Formule de Viète

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Remarque(s) :

- Le symbole $\pm$ se lit « plus ou moins ». On peut l'utiliser pour indiquer que l'on considère deux quantités : celle sans signe moins devant, et celle avec.

Démonstration

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c=0 &\Leftrightarrow a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0 \\ &\Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \\ &\Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a} \\ &\Leftrightarrow x^2+2\times\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \\ &\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \quad \text{avec } \frac{b^2-4ac}{4a^2}\geq 0 \\ &\Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{aligned}$$

$\square$

Définition 1.1 – Discriminant

La quantité b^2-4ac est appelée **discriminant** de ax^2+bx+c et est notée $\boldsymbol{\Delta}$ (« **delta** »).

Propriété 1.2

Soit l'équation (E) : $ax^2+bx+c=0$.

1. Si $\Delta>0$, alors (E) **a deux solutions** :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. Si $\Delta=0$, alors (E) **a une unique solution** :

$$x_0=-\frac{b}{2a}$$

3. Si $\Delta<0$, alors (E) **n'a pas de solution réelle**.

Définition 1.2

Les valeurs en lesquelles un polynôme s'annule sont appelées **racines** du polynômes.

Démonstration

$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ n'a de sens que si $\Delta\geq 0$.
L'équation $ax^2+bx+c=0$ n'a donc aucune solution réelle dans le cas où $\Delta<0$.
Par ailleurs :

- Si $\Delta>0$, on trouve bien deux solutions distinctes : $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta=0$, alors $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=-\frac{b}{2a}$.

$\square$

Exemple 1.2. Résoudre les équations suivantes :

1. $x^2-6x-7=0$.
   $\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\times1\times(-7)=36+28=64$.
   $\Delta>0$, donc l'équation a deux solutions distinctes.

$$\begin{aligned} x_1&=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &=\frac{-(-6)-\sqrt{64}}{2\times1} \\ &=\frac{6-8}{2} \\ &=-1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_2&=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &=\frac{-(-6)+\sqrt{64}}{2\times1} \\ &=\frac{6+8}{2} \\ &=7 \end{aligned}$$

$$S=\{-1\ ;\ 7\}$$

2. $3x^2+6x+3=0$.
   $\Delta=b^2-4ac=6^2-4\times3\times3=36-36=0$.
   $\Delta=0$, donc l'équation a une unique solution.

$$\begin{aligned} x_0&=\frac{-b}{2a} \\ &=-\frac{6}{2\times3} \end{aligned}$$

$$= -1$$

$$S = \{-1\}$$

3. $x^2 - 4x + 5 = 0$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16 - 20 = -4$.
   $\Delta < 0$, donc l'équation n'admet aucune solution réelle.

$$S = \emptyset$$

Exercices : B