A Résolution par factorisation

A.1 Questions de cours

1 Rappeler les trois identités remarquables.

1. $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
2. $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$
3. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

A.2 Faire ses gammes

2 Résoudre les équations suivantes :

1. $x^2=4$ 2. $x^2-36=0$ 3. $(x+1)^2=16$ 4. $x^2=-9$
5. $(x-5)^2=81$ 6. $4x^2-25=0$ 7. $9x^2-100=0$ 8. $25x^2-121=0$

1.
$$\begin{aligned} x^2=4 &\Leftrightarrow x=\sqrt{4} \quad \text{ou} \quad x=-\sqrt{4}\\ &\Leftrightarrow x=2 \quad \text{ou} \quad x=-2\end{aligned}$$
$$\boxed{S=\{-2\ ;\ 2\}}$$

2.
$$\begin{aligned} x^2-36=0 &\Leftrightarrow x^2=36\\ &\Leftrightarrow x=\sqrt{36} \quad \text{ou} \quad x=-\sqrt{36}\\ &\Leftrightarrow x=6 \quad \text{ou} \quad x=-6\end{aligned}$$
$$\boxed{S=\{-6\ ;\ 6\}}$$

3.
$$\begin{aligned} (x+1)^2=16 &\Leftrightarrow x+1=\sqrt{16} \quad \text{ou} \quad x+1=-\sqrt{16}\\ &\Leftrightarrow x+1=4 \quad \text{ou} \quad x+1=-4\\ &\Leftrightarrow x=3 \quad \text{ou} \quad x=-5\end{aligned}$$
$$\boxed{S=\{-5\ ;\ 3\}}$$

4. $x^2=-9$. Un carré est toujours positif, donc $x^2=-9$ est impossible.
$$\boxed{S=\emptyset}$$

5.
$$\begin{aligned} (x-5)^2=81 &\Leftrightarrow x-5=\sqrt{81} \quad \text{ou} \quad x-5=-\sqrt{81}\\ &\Leftrightarrow x-5=9 \quad \text{ou} \quad x-5=-9\\ &\Leftrightarrow x=14 \quad \text{ou} \quad x=-4\end{aligned}$$
$$\boxed{S=\{-4\ ;\ 14\}}$$

6.
$$\begin{aligned} 4x^2-25=0 &\Leftrightarrow 4x^2=25\\ &\Leftrightarrow (2x)^2=25\\ &\Leftrightarrow 2x=\sqrt{25} \quad \text{ou} \quad 2x=-\sqrt{25}\\ &\Leftrightarrow x=\frac{5}{2} \quad \text{ou} \quad x=-\frac{5}{2}\end{aligned}$$

7.
$$\begin{aligned} 9x^2-100=0 &\Leftrightarrow 9x^2=100\\ &\Leftrightarrow (3x)^2=100\\ &\Leftrightarrow 3x=\sqrt{100} \quad \text{ou} \quad 3x=-\sqrt{100}\\ &\Leftrightarrow x=\frac{10}{3} \quad \text{ou} \quad x=-\frac{10}{3}\end{aligned}$$
$$\boxed{S=\left\{-\frac{10}{3}\ ;\ \frac{10}{3}\right\}}$$

8.
$$\begin{aligned} 25x^2-121=0 &\Leftrightarrow (5x)^2-11^2=0\\ &\Leftrightarrow (5x+11)(5x-11)=0\\ &\Leftrightarrow 5x+11=0 \quad \text{ou} \quad 5x-11=0\\ &\Leftrightarrow 5x=-11 \quad \text{ou} \quad 5x=11\\ &\Leftrightarrow x=-\frac{11}{5} \quad \text{ou} \quad x=\frac{11}{5}\end{aligned}$$
$$\boxed{S=\left\{-\frac{11}{5}\ ;\ \frac{11}{5}\right\}}$$

3 Résoudre les équations suivantes :

1. $x^2+4x+4=0$. 2. $x^2-6x+9=0$ 3. $x^2+10x=-25$ 4. $x^2+81=-18x$

5. $2x^2-16x=-32$
6. $3x^2-12x=-12$
7. $x^2+x+4=-x+3$
8. $2x^2-20x+50=8x-48$

1.

$$\begin{aligned} x^2+4x+4=0 &\Leftrightarrow x^2+2\times x\times 2+2^2=0 \\ &\Leftrightarrow (x+2)^2=0 \\ &\Leftrightarrow x+2=0 \\ &\Leftrightarrow x=-2 \end{aligned}$$

$$\boxed{S=\{-2\}}$$

2.

$$\begin{aligned} x^2-6x+9=0 &\Leftrightarrow x^2-2\times x\times 3+3^2=0 \\ &\Leftrightarrow (x-3)^2=0 \\ &\Leftrightarrow x-3=0 \\ &\Leftrightarrow x=3 \end{aligned}$$

$$\boxed{S=\{3\}}$$

3.

$$\begin{aligned} x^2+10x=-25 &\Leftrightarrow x^2+10x+25=0 \\ &\Leftrightarrow x^2+2\times x\times 5+5^2=0 \\ &\Leftrightarrow (x+5)^2=0 \\ &\Leftrightarrow x+5=0 \\ &\Leftrightarrow x=-5 \end{aligned}$$

$$\boxed{S=\{-5\}}$$

4.

$$\begin{aligned} x^2+81=-18x &\Leftrightarrow x^2+18x+81=0 \\ &\Leftrightarrow x^2+2\times x\times 9+9^2=0 \\ &\Leftrightarrow (x+9)^2=0 \\ &\Leftrightarrow x+9=0 \\ &\Leftrightarrow x=-9 \end{aligned}$$

$$\boxed{S=\{-9\}}$$

5.

$$\begin{aligned} 2x^2-16x=-32 &\Leftrightarrow 2x^2-16x+32=0 \\ &\Leftrightarrow 2\left(x^2-8x+16\right)=0 \\ &\Leftrightarrow x^2-8x+16=0 \\ &\Leftrightarrow x^2-2\times x\times 4+4^2=0 \\ &\Leftrightarrow (x-4)^2=0 \\ &\Leftrightarrow x-4=0 \\ &\Leftrightarrow x=4 \end{aligned}$$

$$\boxed{S=\{4\}}$$

6.

$$\begin{aligned} 3x^2-12x=-12 &\Leftrightarrow 3x^2-12x+12=0 \\ &\Leftrightarrow 3\left(x^2-4x+4\right)=0 \\ &\Leftrightarrow x^2-4x+4=0 \\ &\Leftrightarrow x^2-2\times x\times 2+2^2=0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2=0 \\ &\Leftrightarrow x-2=0 \\ &\Leftrightarrow x=2 \end{aligned}$$

$$\boxed{S=\{2\}}$$

7.

$$\begin{aligned} x^2+x+4=-x+3 &\Leftrightarrow x^2+2x+1=0 \\ &\Leftrightarrow x^2+2\times x\times 1+1^2=0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2=0 \\ &\Leftrightarrow x+1=0 \\ &\Leftrightarrow x=-1 \end{aligned}$$

$$\boxed{S=\{-1\}}$$

8.

$$\begin{aligned} 2x^2-20x+50=8x-48 &\Leftrightarrow 2x^2-28x+98=0 \\ &\Leftrightarrow 2\left(x^2-14x+49\right)=0 \\ &\Leftrightarrow x^2-14x+49=0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x^2-2\times x\times 7+7^2=0$$
$$\Leftrightarrow (x-7)^2=0$$
$$\Leftrightarrow x-7=0$$
$$\Leftrightarrow x=7$$

$\boxed{S=\{7\}}$

4 Résoudre les équations suivantes :

1. $x^2+4x-12=0$
2. $x^2-6x=16$
3. $2x^2=-16x+66$
4. $3x^2-15=12x$

1.

$$\begin{aligned} x^2+4x-12=0 &\Leftrightarrow x^2+2\times x\times 2+2^2-2^2-12=0\\ &\Leftrightarrow (x+2)^2-2^2-12=0\\ &\Leftrightarrow (x+2)^2-16=0\\ &\Leftrightarrow (x+2)^2=16\\ &\Leftrightarrow x+2=\sqrt{16}\quad\text{ou}\quad x+2=-\sqrt{16}\\ &\Leftrightarrow x=4-2\quad\text{ou}\quad x=-4-2\\ &\Leftrightarrow x=2\quad\text{ou}\quad x=-6\end{aligned}$$

$\boxed{S=\{-6\ ;\ 2\}}$

2.

$$\begin{aligned} x^2-6x=16 &\Leftrightarrow x^2-2\times x\times 3+3^2-3^2=16\\ &\Leftrightarrow (x-3)^2-3^2=16\\ &\Leftrightarrow (x-3)^2=16+3^2\\ &\Leftrightarrow (x-3)^2=25\\ &\Leftrightarrow x-3=\sqrt{25}\quad\text{ou}\quad x-3=-\sqrt{25}\\ &\Leftrightarrow x=5+3\quad\text{ou}\quad x=-5+3\\ &\Leftrightarrow x=8\quad\text{ou}\quad x=-2\end{aligned}$$

$\boxed{S=\{-2\ ;\ 8\}}$

3.

$$\begin{aligned} 2x^2=-16x+66 &\Leftrightarrow x^2=-8x+33\\ &\Leftrightarrow x^2+8x=33\\ &\Leftrightarrow x^2+2\times 4x+4^2-4^2=33\\ &\Leftrightarrow x^2+2\times 4x+16=33+16\\ &\Leftrightarrow (x+4)^2=49\\ &\Leftrightarrow x+4=\sqrt{49}\quad\text{ou}\quad x+4=-\sqrt{49}\\ &\Leftrightarrow x=7-4\quad\text{ou}\quad x=-7-4\\ &\Leftrightarrow x=3\quad\text{ou}\quad x=-11\end{aligned}$$

$\boxed{S=\{-11\ ;\ 3\}}$

4.

$$\begin{aligned} 3x^2-15=12x \Leftrightarrow 3x^2-12x-15=0h \qquad &\Leftrightarrow 3\left(x^2-4x-5\right)=0\\ &\Leftrightarrow x^2-4x-5=0\\ &\Leftrightarrow x^2-2\times x\times 2+2^2-2^2-5=0\\ &\Leftrightarrow (x-2)^2-9=0\\ &\Leftrightarrow (x-2)^2-3^2=0\\ &\Leftrightarrow (x-2+3)(x-2-3)=0\\ &\Leftrightarrow (x+1)(x-5)=0\\ &\Leftrightarrow x+1=0\quad\text{ou}\quad x-5=0\\ &\Leftrightarrow x=-1\quad\text{ou}\quad x=5\end{aligned}$$

$\boxed{S=\{-1\ ;\ 5\}}$

A.3 Exercices d'entraînement

5 Résoudre les équations suivantes :

1. $x^2-9=0$
2. $35x^2+7x=0$
3. $x^2-25=0$
4. $x^2+25=0$
5. $121x^2-25=0$
6. $36-6x^2=0$
7. $\frac{1}{25}-\frac{x^2}{16}=0$
8. $12x^2=6x$
9. $x^2-8x+16=0$
10. $4x^2+12x+9=0$
11. $x^2-4x-21=0$
12. $x^2-14x+13=0$
13. $2x^2+2x-40=0$
14. $6x^2-12x=-6$
15. $12x^2=12x-3$
16. $45x^2-30x=-5$
17. $(x+3)^2=-2x-7$
18. $(x+4)^2=-2x-9$
19. $12x+2=-18x^2$
20. $4x^2-16x-84=0$
21. $2x^2-20x-48=0$
22. $2x^2+18x=-40$

1.

$$x^2-9=0 \Leftrightarrow x^2-3^2=0$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (x+3)(x-3)=0\\
&\Leftrightarrow x+3=0 \quad \text{ou} \quad x-3=0\\
&\Leftrightarrow x=-3 \quad \text{ou} \quad x=3
\end{aligned}
$$

$$\boxed{S=\{-3\ ;\ 3\}}$$

2.

$$
\begin{aligned}
35x^2+7x=0 &\Leftrightarrow x(35x+7)=0\\
&\Leftrightarrow x=0 \quad \text{ou} \quad 35x+7=0\\
&\Leftrightarrow x=0 \quad \text{ou} \quad x=-\frac{1}{5}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{S=\left\{-\frac{1}{5}\ ;\ 0\right\}}$$

3.

$$
\begin{aligned}
x^2-25=0 &\Leftrightarrow x^2=25\\
&\Leftrightarrow x=\sqrt{25} \quad \text{ou} \quad x=-\sqrt{25}\\
&\Leftrightarrow x=5 \quad \text{ou} \quad x=-5
\end{aligned}
$$

$$\boxed{S=\{-5\ ;\ 5\}}$$

4.

$$x^2+25=0 \Leftrightarrow x^2=-25$$

Or un carré est toujours positif, donc il n'existe pas de réel x tel que $x^2 = -25$.

$$\boxed{S=\emptyset}$$

5.

$$
\begin{aligned}
121x^2-25=0 &\Leftrightarrow (11x)^2-5^2=0\\
&\Leftrightarrow (11x-5)(11x+5)=0\\
&\Leftrightarrow 11x-5=0 \quad \text{ou} \quad 11x+5=0\\
&\Leftrightarrow 11x=5 \quad \text{ou} \quad 11x=-5\\
&\Leftrightarrow x=\frac{5}{11} \quad \text{ou} \quad x=-\frac{5}{11}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{S=\left\{-\frac{5}{11}\ ;\ \frac{5}{11}\right\}}$$

6.

$$
\begin{aligned}
36-6x^2=0 &\Leftrightarrow 6(6-x^2)=0\\
&\Leftrightarrow 6-x^2=0\\
&\Leftrightarrow -x^2=-6\\
&\Leftrightarrow x^2=6\\
&\Leftrightarrow x=\sqrt{6} \quad \text{ou} \quad x=-\sqrt{6}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{S=\left\{-\sqrt{6}\ ;\ \sqrt{6}\right\}}$$

7.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{25}-\frac{x^2}{16}=0 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^2-\left(\frac{x}{4}\right)^2=0\\
&\Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}+\frac{x}{4}\right)\left(\frac{1}{5}-\frac{x}{4}\right)=0\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{5}+\frac{x}{4}=0 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{5}-\frac{x}{4}=0\\
&\Leftrightarrow \frac{x}{4}=-\frac{1}{5} \quad \text{ou} \quad -\frac{x}{4}=-\frac{1}{5}\\
&\Leftrightarrow x=-\frac{4}{5} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{4}=\frac{1}{5}\\
&\Leftrightarrow x=-\frac{4}{5} \quad \text{ou} \quad x=\frac{4}{5}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{S=\left\{-\frac{4}{5}\ ;\ \frac{4}{5}\right\}}$$

8.

$$
\begin{aligned}
12x^2=6x &\Leftrightarrow 12x^2-6x=0\\
&\Leftrightarrow x(12x-6)=0\\
&\Leftrightarrow x=0 \quad \text{ou} \quad 12x-6=0\\
&\Leftrightarrow x=0 \quad \text{ou} \quad 12x=6\\
&\Leftrightarrow x=0 \quad \text{ou} \quad x=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{S=\left\{0\ ;\ \frac{1}{2}\right\}}$$

9.

$$x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 \times x \times 4 + 4^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-4)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 4$$

$$\boxed{S = \{4\}}$$

10.

$$4x^2 + 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow 4\left(x^2 + 3x + \frac{9}{4}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + \frac{9}{4} = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 2 \times x \times \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x + \frac{3}{2} = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$\boxed{S = -\frac{3}{2}}$$

11.

$$x^2 - 4x - 21 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2 - 2^2 - 21 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2 - 2^2 - 21 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 25$$
$$\Leftrightarrow x - 2 = \sqrt{25} \quad \text{ou} \quad x - 2 = -\sqrt{25}$$
$$\Leftrightarrow x = 5 + 2 \quad \text{ou} \quad x = -5 + 2$$
$$\Leftrightarrow x = 7 \quad \text{ou} \quad x = -3$$

$$\boxed{S = \{-3\ ;\ 7\}}$$

12.

$$x^2 - 14x + 13 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 \times x \times 7 + 7^2 - 7^2 + 13 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-7)^2 - 7^2 + 13 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-7)^2 - 49 + 13 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-7)^2 = 36$$
$$\Leftrightarrow x - 7 = \sqrt{36} \quad \text{ou} \quad x - 7 = -\sqrt{36}$$
$$\Leftrightarrow x = 6 + 7 \quad \text{ou} \quad x = -6 + 7$$
$$\Leftrightarrow x = 13 \quad \text{ou} \quad x = 1$$

$$\boxed{S = \{1\ ;\ 13\}}$$

13.

$$2x^2 + 2x - 40 = 0 \Leftrightarrow 2\left(x^2 + x - 20\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + x - 20 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 2 \times x \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 20 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{81}{4} = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$$
$$\Leftrightarrow x + \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{81}{4}} \quad \text{ou} \quad x + \frac{1}{2} = -\sqrt{\frac{81}{4}}$$
$$\Leftrightarrow x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{4}} \quad \text{ou} \quad x + \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{4}}$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} + \frac{9}{2} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{2} - \frac{9}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{8}{2} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{10}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = 4 \quad \text{ou} \quad x = -5$$

$$\boxed{S = \{-5\ ;\ 4\}}$$

14.

$$6x^2 - 12x = -6 \Leftrightarrow 6x^2 - 12x + 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow 6\left(x^2 - 2x + 1\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x-1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$

$$\boxed{S = \{1\}}$$

15.

$$\begin{aligned} 12x^2 = 12x - 3 &\Leftrightarrow 12x^2 - 12x + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3\left(4x^2 - 4x + 1\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x)^2 - 2 \times 2x \times 1 + 1^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x-1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{S = \left\{\frac{1}{2}\right\}}$$

B Résolution générale

B.1 Questions de cours

6 Soit (E) l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

1. Combien (E) peut-elle avoir de solutions ?
2. Qu'est-ce qui permet de savoir si une telle équation admet une ou plusieurs solutions ?
3. Exprimer ces solutions éventuelles en fonction de a, b et c.

1. 0, 1 ou 2.
2. Le discriminant, qu'on note Δ, égal à $b^2 - 4ac$.
   Si $\Delta < 0$, (E) n'a pas de solution.
   Si $\Delta = 0$, (E) a une solution.
   Si $\Delta > 0$, (E) a deux solutions.
3. Si (E) a deux solutions, elles sont de la forme :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Si (E) n'a qu'une solution, il s'agit du réel $-\frac{b}{2a}$.

B.2 Faire ses gammes

7 Résoudre les équations suivantes en utilisant la formule de Viète :

1. $4x^2 - 9 = 0$ 2. $x^2 + 49 = 0$ 3. $x^2 + x + 1 = 0$ 4. $x^2 + x = 20$
5. $5x^2 - 4x - 1 = 0$ 6. $3x^2 + 21x + 36 = 0$
7. $32x^2 - 32x + 8 = 0$ 8. $17x^2 + 34x = -51$
9. $x^2 + x - 1 = 0$ 10. $45x^2 - 30x = -5$ 11. $3x^2 - 6(x+1) = -7$
12. $(x-2)^2 + 4x - 4 = 7$

1. $a = 4$; $b = 0$; $c = -9$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \times 4 \times (-9) = 144$.
   $\Delta > 0$, donc $4x^2 - 9 = 0$ admet deux solutions réelles.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-0 - \sqrt{144}}{2 \times 4} \\ &= \frac{-12}{8} \\ &= -\frac{3}{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-0 + \sqrt{144}}{2 \times 4} \\ &= \frac{12}{8} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{S = \left\{-\frac{3}{2} ; \frac{3}{2}\right\}}$$

2. $a = 1$; $b = 0$; $c = 49$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \times 1 \times 49 = -196$.
   $\Delta < 0$, donc l'équation n'a pas de solution réelle.

$$\boxed{S = \emptyset}$$

3. $a = 1$; $b = 1$; $c = 1$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$.
   $\Delta < 0$, donc l'équation n'a pas de solution réelle.

$$\boxed{S = \emptyset}$$

4. $x^2+x=20 \Leftrightarrow x^2+x-20=0$. $a=1$; $b=1$; $c=-20$.
$\Delta = 1^2-4\times1\times(-20)=81$.
$\Delta>0$, donc l'équation $x^2+x-20=0$ admet deux solutions réelles.

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-\sqrt{81}}{2\times1}=-5 \qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+\sqrt{81}}{2\times1}=4$$

$$\boxed{S=\{-5\,;\,4\}}$$

5. $a=5$, $b=-4$ et $c=-1$.
$\Delta=(-4)^2-4\times5\times(-1)=36$.
$\Delta>0$, donc $5x^2-4x-1=0$ a deux solutions réelles.

$$x_1=\frac{-(-4)-\sqrt{36}}{2\times5}=\frac{4-6}{10}=-\frac{1}{5} \qquad x_2=\frac{-(-4)+\sqrt{36}}{2\times5}=1$$

$$\boxed{S=\left\{-\frac{1}{5}\,;\,1\right\}}$$

6. $a=3$; $b=21$; $c=36$.
$\Delta=21^2-4\times3\times36=9$.
$\Delta>0$ donc l'équation a deux solutions réelles.

$$x_1=\frac{-21-\sqrt{9}}{2\times3}=\frac{-21-3}{6}=-4 \qquad x_2=\frac{-21+\sqrt{9}}{2\times3}=-3$$

$$\boxed{S=\{-4\,;\,-3\}}$$

7. $a=32$; $b=-32$; $c=8$.
$\Delta=(-32)^2-4\times32\times8=0$.
$\Delta=0$ donc l'équation a une unique solution.

$$x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-32}{2\times32}=\frac{1}{2}$$

$$\boxed{S=\left\{\frac{1}{2}\right\}}$$

8. $17x^2+34x=-51 \Leftrightarrow 17x^2+34x+51=0$.
$\Delta=34^2-4\times17\times51=-2312$.
$\Delta<0$, donc l'équation n'a pas de solution réelle.

$$\boxed{S=\emptyset}$$

9. $a=1$; $b=1$; $c=-1$.
$\Delta=1^2-4\times1\times(-1)=5$.
$\Delta>0$ donc l'équation a deux solutions réelles.

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2\times1}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \qquad x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2\times1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\boxed{S=\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\,;\,\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}}$$

10. $45x^2-30x=-5 \Leftrightarrow 45x^2-30x+5=0$.
$a=45$; $b=-30$; $c=5$.
$\Delta=(-30)^2-4\times45\times5=0$.
$\Delta=0$, donc l'équation a une unique solution.

$$x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-30}{2\times45}=\frac{30}{90}=\frac{1}{3}$$

$$\boxed{S = \left\{\frac{1}{3}\right\}}$$

11. $3x^2 - 6(x+1) = -7 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 1 = 0$.
$a = 3$; $b = -6$; $c = 1$.
$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 24$.
$\Delta > 0$, donc l'équation a deux solutions.

$$x_1 = \frac{-(-6) - \sqrt{24}}{2 \times 3} = \frac{6 - \sqrt{4 \times 6}}{6} = \frac{6 - 2\sqrt{6}}{6} = \frac{3 - \sqrt{6}}{3}$$

$$x_2 = \frac{-(-6) + \sqrt{24}}{2 \times 3} = \frac{3 + \sqrt{6}}{3}$$

$$\boxed{S = \left\{\frac{3 - \sqrt{6}}{3} \,;\, \frac{3 + \sqrt{6}}{3}\right\}}$$

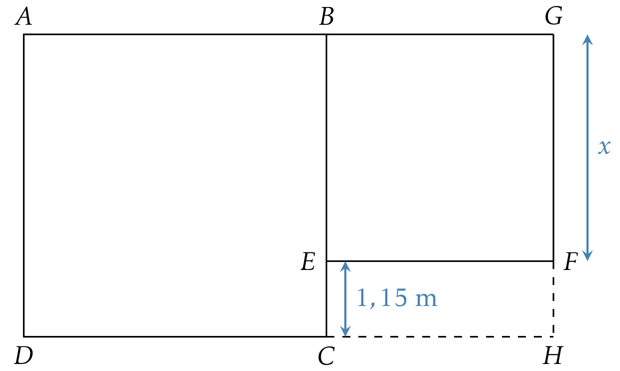
12. $(x-2)^2 + 4x - 4 = 7 \Leftrightarrow x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2 + 4x - 11 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7 = 0$.

$$x^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 7 \Leftrightarrow x = \sqrt{7} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{7}$$

$$\boxed{S = \left\{-\sqrt{7} \,;\, \sqrt{7}\right\}}$$

B.3 Exercices d'entraînement

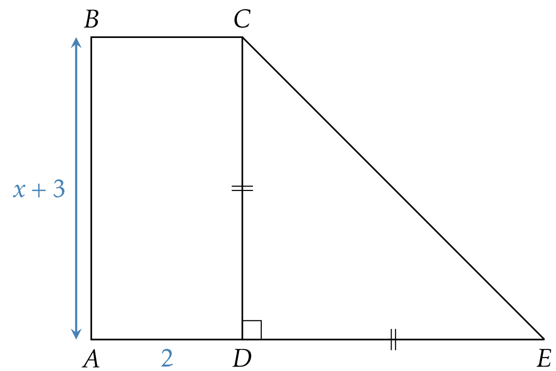
8 Un architecte travaille sur le plan d'une maison.
Le plan de l'étage est schématisé par la figure ci-dessous.
$ABCD$ et $BGFE$ sont deux carrés. Le rectangle $EFHC$, d'une largeur de 1,15 m, représente un balcon.
On appelle x la longueur du côté du plus petit des deux carrés.



Déterminer la valeur de x telle que l'étage ait une surface de plancher de 80 m^2 (le balcon n'est pas pris en compte).

L'aire de l'étage est égale à $(x+1,15)^2 + x^2$.
$(x+1,15)^2 + x^2 = x^2 + 2 \times x \times 1,15 + 1,15^2 + x^2 = 2x^2 + 2,3x + 1,3225$.
On cherche à résoudre $2x^2 + 2,3x + 1,3225 = 80$, soit $2x^2 + 2,3x - 78,6775 = 0$.
$\Delta = 634,71$.
On en déduit $x_1 \approx -6,873$ et $x_2 \approx 5,723$.
Une longueur négative n'ayant pas de sens, la longueur recherchée est environ $\boxed{5,723}$ mètres (on a arrondi au millimètre près).

9 On considère la figure ci-contre composée du rectangle $ABCD$ et du triangle CDE rectangle et isocèle en D.
Déterminer la ou les valeurs de x telle(s) que l'aire du rectangle $ABCD$ soit égale à quatre fois l'aire du triangle CDE.



L'aire du rectangle est égale à $2x + 6$.

L'aire du triangle est égale à $\frac{(x+3)^2}{2}$.

$$2x+6 = 4\times\frac{(x+3)^2}{2} \Leftrightarrow -2x^2-10x-12=0$$

On résout l'équation et on trouve $\Delta = 4$ puis les solutions -3 et -2.
La seule solution ayant du sens dans le contexte donné est $\boxed{-2}$.

10 Dans le plan, on considère un anneau d'aire $\mathcal{A}$ formé par un grand cercle de rayon R à l'intérieur duquel se situe un plus petit cercle de rayon r.

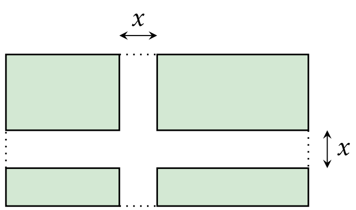
1. Exprimer l'aire de l'anneau en fonction de R et r.
2. Déterminer R sachant que $\mathcal{A} = 120$ cm^2 et $r = 4$ cm.

1. $\mathcal{A} = \pi R^2 - \pi r^2$.
2.

$$\begin{aligned}120 = \pi R^2 - \pi\times 4^2 &\Leftrightarrow \pi R^2 = 120+16\pi\\ &\Leftrightarrow R^2 = \frac{120+16\pi}{\pi}\end{aligned}$$

Comme $R>0$, on en déduit : $R = \sqrt{\frac{120+16\pi}{\pi}} \approx 7{,}36$.
Le grand cercle doit donc avoir un rayon environ égal à $\boxed{7{,}36 \text{ cm}}$.

11 Un jardin de forme rectangulaire a pour dimension 20 m de longueur et 15 m de largeur.
Deux allées d'une largeur de x mètres partagent transversalement le jardin.
Du gazon est planté sur le reste du jardin.



Déterminer la ou les valeurs possibles de x telle(s) que l'aire des allées et du gazon soient égales.

Notons $\mathcal{A}_G$ l'aire du gazon et $\mathcal{A}_A$ l'aire des allées.
$\mathcal{A}_A = 20\times x + 15\times x - x^2 = -x^2+35x$.
On en déduit que $\mathcal{A}_G = 20\times 15 - \mathcal{A}_A = x^2-35x+300$.

On cherche x tel que $\mathcal{A}_A = \mathcal{A}_G$.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_A = \mathcal{A}_G &\Leftrightarrow -x^2+35x = x^2-35x+300\\ &\Leftrightarrow 2x^2-70x+300=0\end{aligned}$$

$a=2$; $b=-70$; $c=300$.
$\Delta = b^2-4ac = (-70)^2-4\times 2\times 300 = 4900-2400 = 2500$.
$\Delta>0$, donc l'équation $2x^2-70x+300=0$ admet deux solutions réelles.

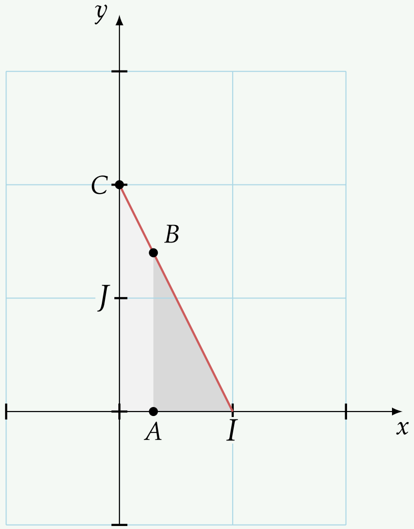
$$x_1 = \frac{-(-70)-\sqrt{2500}}{2\times 2} = \frac{70-50}{4} = 5 \qquad x_2 = \frac{-(-70)+\sqrt{2500}}{2\times 2} = \frac{70+50}{4} = 30$$

$x=30$ n'est pas possible dans le contexte donné.
On donc $\mathcal{A}_A = \mathcal{A}_G$ pour $\boxed{x=5}$.

12 Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = 2-2x$.

1. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;I,J)$, en choisissant 4 gros carreaux pour une unité.
2. Soit C le point de coordonnées $(0;2)$.
   Soient A le point de coordonnées $(a;0)$, avec a compris entre 0 et 1, et B le point de coordonnées $\big(a;f(a)\big)$.
   Déterminer la valeur de a telle que $[AB]$ partage le triangle OIC en deux parties de même aire. On déterminera la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

1.



2. OIC est rectangle en O.
   Notons $\mathcal{A}_{OIC}$ l'aire de OIC.
   $\mathcal{A}_{OIC} = \frac{OI \times OC}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1$.
   Pour que $[AB]$ partage OIC en deux parties de même aire, on doit donc avoir $\mathcal{A}_{ABI} = \frac{1}{2}$.
   ABI est rectangle en A, d'où $\mathcal{A}_{ABI} = \frac{AI \times AB}{2}$.
   On a directement $AI = 1 - a$.
   $AB = f(a) = 2 - 2a = 2(1-a)$.
   Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ABI} = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \frac{AI \times AB}{2} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{2(1-a)(1-a)}{2} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow (1-a)^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1-a)^2 = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow 1-a = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{ou} \quad 1-a = -\sqrt{\frac{1}{2}} \\ &\Leftrightarrow -a = \sqrt{\frac{1}{2}} - 1 \quad \text{ou} \quad -a = -\sqrt{\frac{1}{2}} - 1 \\ &\Leftrightarrow a = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{ou} \quad a = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

   On cherche ici une valeur comprise entre 0 et 1, donc la seule solution qui nous intéresse est $1 - \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0{,}293$.