1 Calcul littéral

I Usage de la lettre

Introduction En mathématiques, on cherche souvent à établir des vérités générales. Pour cela, on doit aller au-delà des cas particuliers et faire preuve d'abstraction. Nous allons voir comment l'usage de la lettre en mathématiques permet de généraliser des résultats, de nommer des quantités, ou encore de simplifier les écritures.

I.1 Variable

Définition 1.1 – Variable

Une **variable** est un symbole représentant un objet ou une quantité indéterminé.

Exemple 1.1 :

1. Quelle est l'aire d'un carré de côté de longueur 2 ?
   $2 \cdot 2 = \boxed{4}$.
2. Quelle est l'aire d'un carré de côté de longueur 3 ?
   $3 \cdot 3 = \boxed{9}$.
3. De manière générale, quelle est l'aire d'un carré ?
   On peut nommer x la longueur du carré.
   Si on note $\mathcal{A}(x)$ son aire, alors :

$$\mathcal{A}(x) = x \cdot x = \boxed{x^2}$$

.

I.2 Constante

Définition 1.2 – Constante

Une **constante** est un symbole désignant un nombre connu.

Exemple 1.2 :

Nommer au moins une constante célèbre.
On peut citer la fameuse constante π.
On peut également citer φ (« phi »), représentant le nombre d'or, ou encore e la constante d'euler.

I.3 Paramètre

Définition 1.3 – Paramètre

On appelle **paramètre** un symbole représentant une quantité supposée connue par rapport à d'autres lettres (e.g une variable).

Exemple 1.3 :

Des pommes sont mises en vente sur un marché.
On note x le nombre de kilogrammes de pommes achetés par un client, et $P(x)$ le prix payé par le client en fonction du nombre de kilogrammes achetés.

1. Supposons que ces pommes soient vendues 4 CHF le kilogramme.
   (a) Exprimer $P(x)$ en fonction de x.
   $P(x) = 4 \cdot x = 4x$.
   (b) Quel est le statut de x ?
   x a le statut de variable.
2. On note désormais p le prix de vente au kilogramme.
   (a) Exprimer alors $P(x)$ en fonction de x.
   $P(x) = a \cdot x = ax$.
   (b) Dans cette expression, quel est le statut de p ?
   p a le statut de paramètre.

⚠ En mathématiques, la même lettre, selon qu'elle est en minuscule ou en majuscule, peut représenter deux objets différents. Toutes les notations sont extrêmement précises.

Exercices : A

II Polynômes et opérations

II.1 Monôme

Définition 1.4 – Monôme

Une expression contenant une variable est appelé **monôme** si elle ne contient qu'un seul terme et que la variable est élevée à une puissance entière positive.

Remarque(s) :

- Autrement dit, un monôme est le produit d'un réel et d'une variable élevée à une puissance.

- La puissance doit être entière positive. Par exemple, $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ n'est pas un monôme, et $\frac{1}{x} = x^{-1}$ non plus.

Exemple 1.4 :

1. Donner deux exemples de monômes où la variable est élevée au carré.
   $\boxed{x^2}$ et $\boxed{5x^2}$.
2. Donner deux exemples de monômes où la variable est élevée à la puissance 4.
   $\boxed{9x^4}$ et $\boxed{2x^4}$.
3. Donner deux exemples de monômes où la variable est élevée à la puissance 0.
   $2 \cdot x^0 = 2 \cdot 1 = \boxed{2}$ et $\boxed{6}$.

II.2 Polynôme

Définition 1.5 – Polynôme

$P(x)$ est un **polynôme** s'il s'agit d'une somme de monômes.
Ainsi, $P(x)$ est un polynôme s'il existe $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, avec $n \in \mathbb{N}$, tels que :

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$$

$c_0, c_1, \ldots, c_n$ sont appelés **coefficients** du polynôme.

Exemple 1.5 :

Donner trois exemples de polynômes.
$2x^2 + 5x + 3$ est un polynôme constitué de 3 monômes.
$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ est un poynôme constitué de 6 monômes.
$8x^2 - 3x$ est un polynôme formé de deux monômes.

Remarque(s) :

- Tout monôme est aussi un polynôme (constitué d'un seul monôme).
- Lorsqu'on écrit un polynôme, on range les termes par ordre décroissant des puissances, par convention.

II.3 Opérations

Définition 1.6 – Degré d'un polynôme

Soit $P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$ un polynôme.
Le **degré** de $P(x)$ est le plus grand entier d tel que $c_d \neq 0$.

Remarque(s) :

- Autrement dit, il s'agit de la plus grande puissance à laquelle la variable est élevée.

Propriété 1.1 – Somme et différence de polynômes

Lorsqu'on effectue la somme (resp. différence) de deux polynômes, on effectue la somme (resp. différence) des monômes de même degré.

Remarque(s) :

- Autrement dit, on « compte » séparément les termes de degré 0 (les constantes), 1, 2, 3 etc.

Propriété 1.2 – Produit de polynômes

Effectuer le produit de deux polynômes revient à développer le produit dans un premier temps, puis à réduire le polynôme ainsi obtenu.

Exemple 1.6 :

Soient $A(x) = 2x + 1$ et $B(x) = 5x^2 - x + 3$ deux polynômes.
Calculer $A(x) + B(x)$, $A(x) - B(x)$, $B(x) - A(x)$ et $A(x)B(x)$.

$$\begin{aligned} A(x) + B(x) &= 2x + 1 + 5x^2 - x + 3 \\ &= 5x^2 + 2x - x + 1 + 3 \\ &= 5x^2 + x + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(x) - B(x) &= 2x + 1 - (5x^2 - x + 3) \\ &= 2x + 1 - 5x^2 + x - 3 \\ &= -5x^2 + 3x - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(x) - A(x) &= 5x^2 - x + 3 - (2x + 1) \\ &= 5x^2 - x + 3 - 2x - 1 \\ &\Leftrightarrow 5x^2 - 3x + 2 \end{aligned}$$

$$= -\big(A(x) - B(x)\big)$$

$$\begin{aligned} A(x)\cdot B(x) &= (2x+1)(5x^2-x+3) \\ &= 2x\cdot 5x^2 + 2x\cdot(-x) + 2x\cdot 3 + 1\cdot 5x^2 + 1\cdot(-x) + 1\cdot 3 \\ &= 10x^3 - 2x^2 + 6x + 5x^2 - x + 3 \\ &= 10x^3 - 2x^2 + 5x^2 + 6x - x + 3 \\ &= 10x^3 + 3x^2 + 5x + 3 \end{aligned}$$

Exercices : B

III Résolution de problèmes

Méthode Lorsqu'on cherche à résoudre un problème, il convient de donner un nom à la variable « clé » de celui-ci.
On cherche ensuite à exprimer les différentes quantités en fonction de cette variable, puis on résoud une équation afin de trouver la valeur de la variable qui permet de résoudre le problème.

Exemple 1.7 :

Reprenons l'exemple 1.3.
Supposons maintenant qu'un maraîcher vende effectivement ses pommes à 4 CHF le kilogramme.
Nnous avons exprimé le prix $P(x)$ de x kilogrammes de pommes coûtant 4 CHF le kilogramme : $P(x) = 4x$.
Quelle quantité de pommes pourra acheter une personne qui possède 17.5 CHF ?
$P(x) = 4x$.
Nous cherchons la valeur de x telle que le prix final à payer soit 17.5 CHF.
On veut donc résoudre l'équation $P(x) = 17.5$.

$$\begin{aligned} P(x) = 17.5 &\Leftrightarrow 4x = 17.5 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{17.5}{4} \\ &\Leftrightarrow x = 4.375 \end{aligned}$$

Donc avec 17.5 CHF, cette personne peut acheter 4.375 kilogrammes de pommes, soit 4 375 grammes.

Exercices : C