A Usage de la lettre

A.1 Faire ses gammes

1 Sur un site internet, un T-shirt est vendu 20 CHF, et les frais de port s'élèvent à 10 CHF.
On cherche à établir une formule permettant de calculer le prix payé par un client suivant le nombre de T-shirts qu'il achète.

1. (a) Quel est le prix payé si un client achète 3 T-shirts ?
   (b) Dans ce problème, quelle est la variable ?
   (c) Exprimer le prix d'une commande en fonction de cette variable.
2. On considère maintenant que le prix d'un T-shirt est de t CHF et que les frais de port s'élèvent à p CHF.
   (a) Exprimer de nouveau le prix d'une commande.
   (b) Quels sont les statuts des lettres t et p ?

1. (a) $10+3\cdot 20=70$. Le prix pour 3 T-shirts est de 70 CHF.
   (b) Le nombre de T-shirts achetés.
   (c) Soit n le nombre de T-shirts achetés. Le prix d'une commande est égal à $n\cdot 20+10$.
2. (a) $tn+p$.
   (b) t et p sont des paramètres.

2 On considère un carré de côté $x \geq 1$.
À partir de ce carré, on construit un rectangle en ajoutant 1 à un des côtés, et en enlevant 1 à un autre côté.

1. Construire un schéma représentant le rectangle ainsi construit.
2. Si on prend le cas particulier d'un carré initial de côté 2, quelle est l'aire du rectangle obtenu ?
3. De manière générale, exprimer l'aire du rectangle en fonction de x.

1.
2. $(2+1)(2-1)=3\cdot 1=3$.
3. $(x+1)(x-1)=x^2-1$.
   On applique l'identité remarquable $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

3 Soit un carré de côté x.
On construit un autre carré, en ajoutant a à chacun des côtés du carré initial.
On cherche à calculer l'aire du carré ainsi obtenu en fonction de x.

1. Construire un schéma représentant le carré ainsi obtenu.
2. Quel est le statut de x dans cet énoncé ? Celui de a ?
3. Exprimer l'aire du carré construit en fonction de x.

1.
2. x est une variable, et a est un paramètre.
3. $(x+a)^2$.

A.2 Exercices d'entraînement

4 En utilisant n pour représenter un nombre entier naturel, exprimer :

1. Les nombres pairs.
2. Les nombres impairs.
3. Les multiples de 5.
4. Les entiers positifs se terminant par 2.
5. Les entiers positifs se terminant par 17.

1. $2n$
2. $2n+1$
3. $5n$
4. $10n+2$
5. $100n+17$

5 En utilisant les variables données, exprimer :

1. L'aire d'un rectangle de dimensions l et L.
2. L'aire d'un parallélépipède rectangle de dimensions l, L et h.
3. Le périmètre d'un triangle équilatéral de côté c.
4. L'aire d'un disque de rayon r.
5. L'aire d'un carré de diagonale d.
6. L'aire de la couronne comprise entre un cercle de rayon r_1 et un cercle de rayon r_2, où $r_1 > r_2$.

1. $L\cdot l$
2. $L\cdot l\cdot h$
3. $3c$
4. πr^2
5. Dans un tel carré, si on note c le côté du carré, on a : $2c^2=d^2$, d'après le théorème de Pythagore.

Ainsi, l'aire du carré est égale à $c^2 = \frac{d^2}{2}$.

6. $\pi r_1^2 - \pi r_2^2$

B Polynômes

B.1 Faire ses gammes

6 Dans chacun des cas, simplifier le polynôme, puis préciser son degré ainsi que ses coefficients.

1. $4x^2 + \left(x^2+5\right)$
2. $\left(3x^2+8\right)+(x-1)^2$
3. $\frac{x^2-5}{3}+\frac{x-1}{2}$
4. $\frac{1}{2}\cdot\frac{4x-1}{5}+2(x+1)$
5. $x\cdot\frac{x-1}{2}$
6. $\left(-3x^2+4\right)(x+2)$
7. $x(x+1)(x+2)$
8. $-\frac{x}{4}(2x-5)\left(\frac{1}{2}x+1\right)$
9. $(t-t^2)(1-t^2)$
10. $(y+2)(y+1)(y^2+3)$

1. $5x^2+5$.
   Le degré du polynôme est 2, et $c_2 = 5$, $c_0 = 5$. Les autres coefficients sont nuls.
2. $\left(3x^2+8\right)+(x-1)^2 = 3x^2+8+x^2-2x+1 = 4x^2-2x+9$.
   Degré : 2 ; $c_2 = 4$, $c_1 = -2$ et $c_0 = 9$.
3. $\frac{x^2-5}{3}+\frac{x-1}{2} = \frac{1}{3}x^2-\frac{5}{3}+\frac{x}{2}-\frac{1}{2} = \frac{5}{6}x^2-\frac{13}{6}$.
   Degré : 2 ; $c_2 = \frac{5}{6}$, $c_0 = -\frac{13}{6}$.
4. $\frac{1}{2}\cdot\frac{4x-1}{5}+2(x+1)$.
   Degré : 2 ; $c_2 = \frac{5}{6}$, $c_0 = -\frac{13}{6}$.
5. $x\cdot\frac{x-1}{2} = \frac{x^2-x}{2}$.
   Degré : 2 ; $c_2 = \frac{1}{2}$, $c_1 = -\frac{1}{2}$.
6. $\left(-3x^2+4\right)(x+2) = -3x^3-6x^2+4x+8$.
   Degré : 3 ; $c_3 = -3$, $c_2 = -6$, $c_1 = 4$, $c_0 = 8$.
7. $x(x+1)(x+2) = (x^2+x)(x+2) = x^3+2x^2+x^2+2x = x^3+3x^2+2x$.
   Degré : 3. $c_3 = 1$, $c_2 = 3$, $c_1 = 2$.
8. $-\frac{x}{4}(2x-5)\left(\frac{1}{2}x+1\right) = \left(\frac{-x^2}{2}+\frac{5x}{4}\right)\left(\frac{1}{2}x+1\right) = -\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{8}x^2+\frac{5}{4}x = -\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{8}x^2+\frac{5}{4}x$.
   Degré : 3 ; $c_3 = -\frac{1}{4}$, $c_2 = \frac{1}{8}$, $c_1 = \frac{5}{4}$.
9. $(t-t^2)(1-t^2) = t-t^3-t^2+t^4 = t^4-t^3-t^2+t$.
   Degré : 4 ; $c_4 = 1$, $c_3 = -1$, $c_2 = -1$, $c_1 = 1$.
10. $(y+2)(y+1)(y^2+3) = (y^2+y+2y+2)(y^2+3) = (y^2+3y+2)(y^2+3) = y^4+3y^2+3y^3+9y+2y^2+6 = y^4+3y^3+5y^2+9y+6$.
    Degré : 4 ; $c_4 = 1$, $c_3 = 3$, $c_2 = 5$, $c_1 = 9$, $c_0 = 6$.

B.2 Exercices d'entraînement

7 Dans chacun des cas, calculer $A(x)+B(x)$, $A(x)-B(x)$ et $A(x)B(x)$, puis préciser le degré du polynôme ainsi obtenu ainsi que ses coefficients.

1. $A(x) = 2x-7$ et $B(x) = x^2+x+1$
2. $A(x) = \frac{1}{2}x^3+1$ et $B(x) = \frac{x-1}{2}$
3. $A(x) = \sqrt{2}x^2+5x+2$ et $B(x) = x^2$

1. $A(x)+B(x) = x^2+3x-6$. $\deg(A(x)+B(x)) = 2$; $c_2 = 1$, $c_1 = 3$, $c_0 = -6$.
   $A(x)-B(x) = -x^2+x-8$. $\deg(A(x)-B(x)) = 2$; $c_2 = -1$, $c_1 = 1$, $c_0 = -8$.
   $A(x)B(x) = 2x^3+9x^2+9x+7$. $\deg(A(x)B(x)) = 3$; $c_3 = 2$, $c_2 = 9$, $c_1 = 9$, $c_0 = 7$.
2. $A(x)+B(x) = \frac{x^3}{2}+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$. $\deg(A(x)+B(x)) = 3$; $c_3 = \frac{1}{2}$, $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_0 = \frac{1}{2}$.
   $A(x)-B(x) = \frac{x^3}{2}-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}$. $\deg(A(x)-B(x)) = 3$; $c_3 = \frac{1}{2}$, $c_1 = -\frac{1}{2}$, $c_0 = \frac{3}{2}$.
   $A(x)B(x) = \frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{4}+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$. $\deg(A(x)B(x)) = 4$; $c_4 = \frac{1}{4}$, $c_3 = -\frac{1}{4}$, $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_0 = -\frac{1}{2}$.
3. $A(x)+B(x) = x^2+\sqrt{2}x^2+5x+2 = (1+\sqrt{2})x^2+5x+2$.
   $\deg(A(x)+B(x)) = 2$; $c_2 = 1+\sqrt{2}$, $c_1 = 5$, $c_0 = 2$.
   $A(x)-B(x) = -x^2+\sqrt{2}x^2+5x+2 = (\sqrt{2}-1)x^2+5x+2$. $\deg(A(x)-B(x)) = 2$; $c_3 = \frac{1}{2}$, $c_1 = -\frac{1}{2}$, $c_0 = \frac{3}{2}$.
   $A(x)B(x) = \sqrt{2}x^4+5x^3+2x^2$.

C Résolution de problèmes

8 Déterminer trois nombres entiers consécutifs dont la somme est 426.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On cherche n tel que $n+n+1+n+2 = 426$.

$$\begin{aligned} n+n+1+n+2 = 426 &\Leftrightarrow 3n+3 = 426 \\ &\Leftrightarrow n = 423 \\ &\Leftrightarrow n = 141 \end{aligned}$$

Les trois entiers consécutifs recherchés sont donc 141, 142 et 143.

9 Déterminer quatre nombres pairs consécutifs dont la somme vaut 1 172.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Un nombre pair est de la forme $2n$.
Les trois nombres pairs suivants sont $2n+2$, $2n+4$ et $2n+6$.
On cherche ainsi n tel que $2n+2n+2+2n+4+2n+6 = 1172$.

$$2n+2n+2+2n+4+2n+6 = 1172 \Leftrightarrow 8n = 1160$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1160}{8}$$
$$\Leftrightarrow n = 145$$

$145 \cdot 2 = 290$.
Donc les quatre entiers pairs consécutifs recherchés sont 290, 292, 294 et 296.

10 24 amis vont au restaurant. Au moment de régler l'addition, trois d'entre eux constatent qu'ils ont oublié leur portefeuille.
Chacun des autres convives doit alors payer 1.5 € en plus du prix de son repas.
Quel est le prix du menu ?

Soit x le prix du menu.
D'après l'énoncé, on a $24x = 21 \cdot (x + 1.5)$.

$$\begin{aligned} 24x = 21(x+1.5) &\Leftrightarrow 24x = 21x + 31.5 \\ &\Leftrightarrow 3x = 31.5 \\ &\Leftrightarrow x = 10.5 \end{aligned}$$

Donc le prix du menu est de 10.5 €.

11 Un jardin rectangulaire a un périmètre de 100 m. Si on ajouter 3 m à sa longueur et 5 m à sa largeur, son aire augmente de 225 m^2. Quelles sont les dimensions du jardin ?

Soit L et l la longueur et la largeur du jardin.
D'après l'énoncé : $2L + 2l = 100$ et $(L+3) \cdot (l+5) = L \cdot l + 225$.
$2L + 2l = 100 \Leftrightarrow 2(L+l) = 100 \Leftrightarrow L + l = 50 \Leftrightarrow l = 50 - L$.
On a alors :

$$\begin{aligned} (L+3)\cdot(l+5) = L\cdot l + 225 &\Leftrightarrow (L+3)\cdot(50-L+5) = L\cdot(50-L) + 225 \\ &\Leftrightarrow (L+3)(-L+55) = 50L - L^2 + 225 \\ &\Leftrightarrow -L^2 + 55L - 3L + 165 = 50L - L^2 + 225 \\ &\Leftrightarrow 3L = 60 \\ &\Leftrightarrow L = 20 \end{aligned}$$

On en déduit que $l = 50 - 20 = 30$.
Le rectangle en question a donc pour dimensions 30×20.

12 Le salaire horaire de base d'un travailleur est 10 $, mais il reçoit une fois et demi son salaire horaire pour chaque heure supplémentaire fournie en plus des 40 heures hebdomadaires.
S'il reçoit 595 $ pour une semaine, combien d'heures supplémentaires a-t-il effectuées ?

Soit n le nombre d'heures supplémentaires effectuées.
On a : $595 = 10 \cdot 40 + n \cdot (10 \cdot 1.5)$.
Soit : $595 = 400 + 15n$.

$$\begin{aligned} 595 = 400 + 15n &\Leftrightarrow 15n = 195 \\ &\Leftrightarrow n = 13 \end{aligned}$$

Donc ce travailleur a effectué 13 heures supplémentaires sur cette semaine.

13 Un bambou vertical de 1 mètre de hauteur, lorsqu'il est brisé, a son extrémité qui touche le sol à une distance de 30 cm de sa base.
À quelle hauteur a-t-il été brisé ?

On note x la hauteur en m à laquelle le bambou a été brisé.
La partie supérieure du bambou a pour longueur $1 - x$.
Dans le triangle rectangle formé par le sol, la partie inférieure du bambou, et la partie supérieure, l'hypoténuse est la partie supérieure du bambou.
Ainsi, d'après le théorème de Pythagore : $(1-x)^2 = x^2 + 0.3^2$.

$$\begin{aligned} (1-x)^2 = x^2 + 0.3^2 &\Leftrightarrow 1^2 - 2x + x^2 = x^2 + 0.3^2 \\ &\Leftrightarrow -2x = 0.3^2 - 1^2 \\ &\Leftrightarrow -2x = 0.09 - 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{0.91}{2} \\ &\Leftrightarrow x = 0.455 \end{aligned}$$

Ainsi, le bambou a été brisé à une hauteur de 45.5 cm.