

1

Calcul littéral

I Usage de la lettre

Introduction En mathématiques, on cherche souvent à établir des vérités générales. Pour cela, on doit aller au-delà des cas particuliers et faire preuve d'abstraction. Nous allons voir comment l'usage de la lettre en mathématiques permet de généraliser des résultats, de nommer des quantités, ou encore de simplifier les écritures.

I.1 Variable

Définition 1.1 – Variable

Une _____ est un symbole représentant un objet ou une quantité indéterminé.

Exemple 1.1 :

1. Quelle est l'aire d'un carré de côté de longueur 2?
2. Quelle est l'aire d'un carré de côté de longueur 3?
3. De manière générale, quelle est l'aire d'un carré?

I.2 Constante

Définition 1.2 – Constante

Une _____ est un symbole désignant un nombre connu.

Exemple 1.2 :

} Nommer au moins une constante célèbre.


I.3 Paramètre

Définition 1.3 – Paramètre

On appelle _____ un symbole représentant une quantité supposée connue par rapport à d'autres lettres (e.g une variable).

Exemple 1.3 :

- } Des pommes sont mises en vente sur un marché.
 On note x le nombre de kilogrammes de pommes achetés par un client, et $P(x)$ le prix payé par le client en fonction du nombre de kilogrammes achetés.
1. Supposons que ces pommes soient vendues 4 CHF le kilogramme.
 - (a) Exprimer $P(x)$ en fonction de x .
 - (b) Quel est le statut de x ?
 2. On note désormais p le prix de vente au kilogramme.
 - (a) Exprimer alors $P(x)$ en fonction de x .
 - (b) Dans cette expression, quel est le statut de p ?

 En mathématiques, la même lettre, selon qu'elle est en minuscule ou en majuscule, peut représenter deux objets différents. Toutes les notations sont extrêmement précises.

 **Exercices : A**

II Polynômes et opérations

II.1 Monôme

Définition 1.4 – Monôme

Une expression contenant une variable est appelé _____ si elle ne contient qu'un seul terme et que la variable est élevée à une puissance entière positive.

Remarque(s) :

- Autrement dit, un monôme est le produit d'un réel et d'une variable élevée à une puissance.
- La puissance doit être entière positive. Par exemple, $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ n'est pas un monôme, et $\frac{1}{x} = x^{-1}$ non plus.

Exemple 1.4 :

1. Donner deux exemples de monômes où la variable est élevée au carré.
2. Donner deux exemples de monômes où la variable est élevée à la puissance 4.
3. Donner deux exemples de monômes où la variable est élevée à la puissance 0.

II.2 Polynôme

Définition 1.5 – Polynôme

$P(x)$ est un _____ s'il s'agit d'une somme de monômes.
Ainsi, $P(x)$ est un polynôme s'il existe $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, avec $n \in \mathbb{N}$, tels que :

$$P(x) = \dots\dots\dots$$

c_0, c_1, \dots, c_n sont appelés _____ du polynôme.

Exemple 1.5 :

Donner trois exemples de polynômes.

Remarque(s) :

- Tout monôme est aussi un polynôme (constitué d'un seul monôme).
- Lorsque qu'on écrit un polynôme, on range les termes par ordre décroissant des puissances, par convention.

II.3 Opérations

Définition 1.6 – Degré d'un polynôme

Soit $P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$ un polynôme.
Le _____ de $P(x)$ est le plus grand entier d tel que $c_d \neq 0$.

Remarque(s) :

- Autrement dit, il s'agit de la plus grande puissance à laquelle la variable est élevée.

Propriété 1.1 – Somme et différence de polynômes

Lorsqu'on effectue la somme (resp. différence) de deux polynômes, on effectue la somme (resp. différence) des monômes de même degré.

Remarque(s) :

- Autrement dit, on « compte » séparément les termes de degré 0 (les constantes), 1, 2, 3 etc.

Propriété 1.2 – Produit de polynômes

Effectuer le produit de deux polynômes revient à développer le produit dans un premier temps, puis à réduire le polynôme ainsi obtenu.

Exemple 1.6 :

Soient $A(x) = 2x + 1$ et $B(x) = 5x^2 - x + 3$ deux polynômes.
Calculer $A(x) + B(x)$, $A(x) - B(x)$, $B(x) - A(x)$ et $A(x)B(x)$.

 Exercices : B

III Résolution de problèmes

**Méthode**

Lorsqu'on cherche à résoudre un problème, il convient de donner un nom à la variable « clé » de celui-ci.

On cherche ensuite à exprimer les différentes quantités en fonction de cette variable, puis on résout une équation afin de trouver la valeur de la variable qui permet de résoudre le problème.

Exemple 1.7 :

- } Reprenons l'exemple 1.3.
- } Supposons maintenant qu'un maraîcher vende effectivement ses pommes à 4 CHF le kilogramme.
- } Nous avons exprimé le prix $P(x)$ de x kilogrammes de pommes coûtant 4 CHF le kilogramme : $P(x) = 4x$.
- } Quelle quantité de pommes pourra acheter une personne qui possède 17.5 CHF ?

 Exercices : C