

9

Systemes d'équations

Introduction Certains problèmes ont plusieurs inconnues. Afin de déterminer celles-ci, on traduit les informations contenues dans l'énoncé en équations. Il faut alors trouver les valeurs de ces inconnues vérifiant toutes les équations en même temps.

Si il y a deux inconnues et deux équations, on dit par exemple qu'on résout un système de deux équations à deux inconnues.

De tels systèmes peuvent n'admettre **aucune solution**, une **unique solution**, et dans certains cas une **infinité de solutions**.

Ce chapitre présente deux méthodes de résolution numérique pour ce genre de problèmes.

Dans un système d'équations, on peut :

- Effectuer sur chaque équation les mêmes opérations que d'habitude :
 1. Ajouter à chaque membre le même nombre.
 2. Multiplier chaque membre par un même nombre.
- Additionner/soustraire membre à membre deux équations.

I Méthode 1 : Combinaisons linéaires

Méthode

1. On effectue des opérations sur les équations pour qu'une des inconnues ait le même coefficient dans deux équations.
2. On soustrait alors les deux équations pour annuler cette inconnue.
3. On se ramène ainsi à une équation à une inconnue qui permet de trouver une des inconnues.
4. On en déduit ensuite les autres inconnues.

Exemple 9.1 :

$$\text{Résoudre le système } \begin{cases} -2x - 7y = -25 \\ 3x - 4y = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x - 7y = -25 \\ 3x - 4y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 21y = 75 & (-3) \times L_1 \\ 6x - 8y = -12 & 2 \times L_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} 29y = 87 & L_1 - L_2 \\ 6x - 8y = -12 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ 6x - 8 \times 3 = -12 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ 6x = 12 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$S = \{(2; 3)\}$$

On peut vérifier le résultat obtenu en injectant les solutions dans les équations de départ :

- $-2 \times 2 - 7 \times 3 = -4 - 21 = -25.$
- $3 \times 2 - 4 \times 3 = 6 - 12 = -6.$

II Méthode 2 : Substitution

Méthode

1. On effectue des opérations sur une équation de manière à exprimer une inconnue en fonction des autres.
2. On substitue alors l'inconnue en question à son expression dans les autres équations. Elle n'apparaît alors plus dans les autres équations.
3. On se ramène ainsi à une équation à une inconnue pour déterminer une première inconnue.
4. On en déduit ensuite les autres inconnues.

Exemple 9.2 :

$$\text{Résoudre le système } \begin{cases} -2x - 5y = -27 \\ 2x - 2y = -8 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\begin{cases} -2x - 5y = -27 \\ 2x - 2y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 5y = -27 \\ x = y - 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2(y - 4) - 5y = -27 \\ x = y - 4 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -7y + 8 = -27 \\ x = y - 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -7y = -35 \\ x = y - 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = 5 - 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$S = \{(1; 5)\}$$